



Contribution à la modélisation expérimentale du comportement transitoire des pneumatiques

Laura Alarcon

► To cite this version:

Laura Alarcon. Contribution à la modélisation expérimentale du comportement transitoire des pneumatiques. Autre. Université de Haute Alsace - Mulhouse, 2015. Français. NNT : 2015MULH6351 . tel-01336372

HAL Id: tel-01336372

<https://theses.hal.science/tel-01336372>

Submitted on 23 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contribution à la modélisation expérimentale du comportement transitoire des pneumatiques

THÈSE de DOCTORAT

présentée et soutenue publiquement le 02 juillet 2015

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Haute-Alsace

spécialité : automatique

par

Laura ALARCON

Composition du jury

<i>Président :</i>	X. MOREAU, Professeur, IMS, Université de Bordeaux
<i>Rapporteurs :</i>	A. CHARARA, Professeur, Heudiasyc, Université de technologie de Compiègne D. REMOND, Professeur, LaMCoS, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon
<i>Directeur de thèse :</i>	M. BASSET, Professeur, MIPS, Université de Haute-Alsace
<i>Co-encadrant :</i>	E. ARNOUX, Expert Modélisation et Simulation Systèmes, RENAULT Aubevoye
<i>Invité :</i>	J. COMTE, Ingénieur R&AE Spécialiste Métier Simulation, RENAULT Aubevoye

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au sein du laboratoire MIPS (Modélisation, Intelligence, Processus, Systèmes) de l'Université de Haute-Alsace et de la Direction de la Recherche de RENAULT à Aubevoye, dans le cadre d'un contrat CIFRE.

J'aimerais tout d'abord remercier l'ensemble de mes collègues du laboratoire MIPS ainsi que l'ensemble du personnel de l'ENSISA (Ecole Nationale Supérieure d'ingénieurs Sud Alsace) pour leur gentillesse ainsi que leur soutien tout au long de l'élaboration de cette thèse.

Je remercie également mon directeur de thèse, Monsieur Michel Basset, qui m'a permis de réaliser ma thèse dans les meilleures conditions. Merci pour son appui scientifique, ses multiples conseils et encouragements.

Je remercie Monsieur Charara Ali et Monsieur Remond Didier pour le temps qu'ils ont accordé à la lecture de cette thèse et l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Un grand merci également à Monsieur Xavier Moreau pour l'honneur qu'il m'a fait de présider mon jury de thèse et pour avoir accepté d'examiner ce travail.

C'est également avec plaisir que je remercie toute l'équipe Renault dans laquelle j'ai évolué durant plus de deux ans. Merci à Monsieur Arnoux Emmanuel, mon co-encadrant de thèse pour toutes les connaissances qu'il m'a transmis, de m'avoir guidé pour mener à bien ce projet.

Un grand merci à Julien et Bruno pour leur disponibilité, leur écoute et leur aide précieuse.

Je souhaite encore remercier Isabelle pour sa gentillesse naturelle et ses bons conseils.

Merci à Grégory pour son aide, à tous mes collègues et amis du laboratoire et à tous à ceux que j'aurais pu oublier ...

Mes remerciements s'adressent enfin à mes parents, mes frères et grands-parents qui ont cru en moi, qui m'ont toujours soutenu et encouragé durant ce projet. Merci à ma belle famille qui s'est toujours montrée présente. Je souhaite également remercier mon fiancé Christophe à qui je dois beaucoup. Merci pour ta patience, ton soutien et ton amour. Mes derniers remerciements vont à ma fille Anna, qui m'a donné le courage de terminer ce long projet.

À tous ceux qui me sont chers.

Sommaire

Remerciements	i
Table des figures	ix
Liste des tableaux	xiii
Notations	xv
Liste des publications	xix

Introduction Générale	1
-----------------------	---

Chapitre 1	
Le pneumatique : description et état de l'art des modèles transitoires	3
1.1 Introduction	4
1.2 Présentation générale	4
1.2.1 Structure du pneumatique	4
1.2.2 Différents types de pneumatique	5
1.2.3 Marquage du pneumatique	6
1.2.4 Mécanisme d'adhérence	7
1.3 Modélisation du pneumatique	9
1.3.1 Repères et terminologie	9
1.3.2 Classification des modèles	13
1.3.3 Modèle de Pacejka	14
1.4 État de l'art des modèles transitoires de pneumatique	17
1.4.1 Modèles transitoires Pacejka (2002)	17
1.4.2 Modèle de Ballant	20
1.4.3 Modèle Tametire	23
1.4.4 Modèles développés par le laboratoire AVDL	24

1.4.5	Modèle développé par la société General Motors	29
1.4.6	FTire	30
1.5	Conclusion	32

Chapitre 2

Les plans d'expériences

33

2.1	Introduction	34
2.2	Démarche générale et définitions	34
2.2.1	Étape 1 : Analyser le phénomène ou le procédé à étudier	34
2.2.2	Étape 2 : Déterminer les facteurs influents	36
2.2.3	Étape 3 : Modéliser le phénomène ou le procédé étudié	38
2.2.4	Étape 4 : Optimiser le phénomène ou le procédé étudié	38
2.3	Méthode de criblage	38
2.3.1	Les plans factoriels complets à deux niveaux	38
2.3.2	Les plans factoriels fractionnaires à deux niveaux	42
2.3.3	Analyse statistique du modèle	47
2.3.4	Analyse graphique du modèle	50
2.4	Ajustement de modèle	54
2.4.1	Test d'ajustement du modèle	54
2.4.2	Coefficient de corrélation linéaire multiple	56
2.5	Plans pour surfaces de réponses	57
2.5.1	Présentation	58
2.5.2	Plans composites centrés	58
2.5.3	Analyse du modèle	62
2.6	Conclusion	63

Chapitre 3

Modélisation du comportement transitoire du pneumatique par un modèle à paramètres variants

65

3.1	Introduction	66
3.2	Analyse fréquentielle du pneumatique	66
3.2.1	Présentation du banc d'essais Flat Trac [®]	66
3.2.2	Présentation des essais	67
3.2.3	Diagramme de Bode : $F_y/\alpha = f(w)$	69
3.2.4	Méthode d'identification des paramètres variants	71
3.3	Détermination des facteurs influents en vue de l'élaboration d'un modèle transitoire du pneumatique	72

3.3.1	Plan factoriel complet	72
3.3.2	Analyse du modèle obtenu avec le plan complet	77
3.3.3	Plan factoriel fractionnaire	84
3.3.4	Analyse du modèle obtenu avec le plan fractionnaire	86
3.4	Test d'ajustement des modèles obtenus	87
3.5	Conclusion	88
<hr/>		
Chapitre 4		
Validation du modèle dynamique de pneumatique à paramètres variants		89
<hr/>		
4.1	Introduction	90
4.2	Modèle simplifié de véhicule complet	90
4.2.1	Présentation du modèle	90
4.2.2	Définition des variables	91
4.2.3	Présentation du sous-modèle de direction	94
4.2.4	Présentation du sous-modèle de caisse	95
4.2.5	Présentation du sous-modèle de suspension	99
4.2.6	Présentation du sous-modèle de roues	104
4.3	Présentation des essais	107
4.3.1	Moyens d'essais	107
4.3.2	Manœuvres effectuées	109
4.4	Deux étapes de validation du modèle	110
4.4.1	Validation directe	110
4.4.2	Validation du modèle PV couplé au modèle simplifié de véhicule	119
4.5	Conclusion	127
Conclusion et perspectives		129
<hr/>		
Annexe A		
Outils de statistique		
<hr/>		
A.1	Lois et table de Fisher-Snedecor ($\alpha = 0,025$)	132
A.2	Lois et table de Fisher-Snedecor ($\alpha = 0,05$)	133
A.3	Lois et table de Student	134
Annexe B		
Modèle de Pacejka et ses paramètres		
<hr/>		
Bibliographie		149

Table des figures

1.1	Structure mécanique du pneumatique	4
1.2	Les différentes architectures de pneumatiques [LAR, 1976]	5
1.3	Le marquage du pneumatique	6
1.4	Indices de charge et de vitesse du pneumatique [OXY, 2014]	7
1.5	Le mécanisme d'adhérence	8
1.6	Les différents repères liés au pneumatique	9
1.7	Notations dans la repère ISOW-Q (W pour « <i>Wheel</i> », Q point de contact roue/sol) [Kiébré, 2010]	10
1.8	Effort longitudinal fonction du pseudo-glissement	12
1.9	Dérive et effort transversal : notations et convention	12
1.10	Effort transversal (N) fonction de la dérive (°)	13
1.11	Entrées-sorties de « la formule Magique » de Pacejka	14
1.12	Courbe de la version sinusoïdale de « la formule magique » [Pacejka, 2012]	15
1.13	Angle de chasse et chasse au sol	16
1.14	Courbe de la version cosinus de « la formule magique » [Pacejka, 2012]	16
1.15	Vue de dessus du « <i>Stretched-String model</i> »	17
1.16	Vue de dessus du « <i>Contact mass model</i> »	19
1.17	Schéma du pneumatique fondé sur des ressorts	21
1.18	Schéma du pneumatique en roulement : les pains de gomme se déforment et se déplacent latéralement	22
1.19	Schéma du pneumatique vue du dessus	22
1.20	Les paramètres d'entrée/sortie du modèle Tametire	24
1.21	Entrées/sorties du modèle bidimensionnel développée par A. Umsrithong et C. Sandu	25
1.22	Vue de face du modèle semi-empirique bidimensionnel	26
1.23	Domaines d'application du modèle FTire [COS, 2013]	30
1.24	Déplacements longitudinal, latéral et vertical des segments de ceinture [COS, 2013]	31
1.25	Degré de liberté associé à la rotation des segments de ceinture autour sur de leur axe concentrique [COS, 2013]	31
1.26	« x » degrés de libertés associés à la courbure latérale des segments de ceinture [COS, 2013]	31
2.1	Démarche générale des plans d'expériences [Ferreboeuf, 1998]	34
2.2	Exemple de représentation des variables centrées réduites et du domaine expérimental	35
2.3	Synthèse de la démarche d'analyse de sensibilité et d'incertitude selon [Saltelli, 2006]	36
2.4	Schéma de suivi de la démarche employée : étapes 2 et 3	39

2.5	Graphique d'effets moyens	51
2.6	Exemple de diagramme des interactions	51
2.7	Exemple de diagramme de Pareto des effets normalisés ($\alpha = 0,05$)	52
2.8	Exemple de demi-droite de Henry des effets normalisés ($\alpha = 0.05$)	54
2.9	Schéma de suivi de la démarche employée : étape 4, ajustement du modèle	55
2.10	Schéma de suivi de la démarche employée : étape 3 Bis, modélisation du phénomène	57
2.11	Représentation graphique d'un CCD à deux facteurs	59
2.12	Exemple de courbe d'isoreponses	62
2.13	Représentation des variables centrées réduites et du domaine expérimental	63
3.1	Schéma de synthèse des caractéristiques de la Flat Trac	67
3.2	Schémas de la Flat Trac	68
3.3	Exemple de signaux observés	69
3.4	Diagrammes de Bode associés aux essais effectués Table 3.1	69
3.5	Etude des asymptotes des diagrammes de Bode	70
3.6	Graphique des effets moyens sur l'amplification	79
3.7	Graphique des effets moyens sur le déphasage	79
3.8	Graphique des interactions sur l'amplification	80
3.9	Graphique des interactions sur le déphasage	81
3.10	Diagramme de Pareto des effets normalisés sur le Gain ($\alpha = 0.05$)	81
3.11	Diagramme de Pareto des effets normalisés sur la Phase ($\alpha = 0.05$)	82
3.12	Demi-droite de Henry des effets normalisés sur le Gain ($\alpha = 0.05$)	83
3.13	Demi-droite de Henry des effets normalisés sur la Phase ($\alpha = 0.05$)	83
4.1	Schéma du modèle simplifié utilisé (1)	90
4.2	Définitions des repères utilisés	92
4.3	Schéma du modèle simplifié utilisé (2)	95
4.4	Schéma du modèle simplifié utilisé (3)	98
4.5	Représentation de deux types de systèmes de suspensions	100
4.6	Modèle quart de véhicule	101
4.7	Le repère roue R_W	106
4.8	Véhicule d'essais	107
4.9	Volant dynamométrique FGP	108
4.10	Unité GPS-inertielle, RT 3002 OxTS	108
4.11	Roue dynamométrique Swift 20 A MTS et centrale inertielle déportée RT 3002 wheel / antenne GPS	109
4.12	Vue des pistes utilisées au Centre Technique et d'Essais Renault à Aubevoye	110
4.13	Méthodes de validation	111
4.14	Quart de sinus de dérive	112
4.15	Angle volant, dérive et force latérale mesurés, dans la 1 ^{ère} configuration	113
4.16	Comparaison des courbes des forces latérales en fonction de la dérive mesurée	113
4.17	Angle volant, dérive et force latérale mesurés dans la 2 ^{ème} configuration	114
4.18	Comparaison des courbes des forces latérales en fonction de la dérive mesurée	115
4.19	Origine de la poussée de carrossage [Wong, 2008]	116
4.20	Exemple de poussée de carrossage en fonction de l'angle de carrossage [Gillespie, 1992]	116
4.21	Évolution de la raideur de carrossage du pneumatique étudié	117
4.22	Courbes des forces latérales -en prenant en compte le dévers- en fonction de la dérive mesurée	117

4.23	Evolution de la charge verticale de la roue AVG en corde à droite et en corde à gauche	119
4.24	Schéma de représentation du simulateur du véhicule	120
4.25	Forces latérales mesurées et estimées en corde à droite	121
4.26	Dérives mesurées et estimées en corde à droite	122
4.27	F_y/α mesurées et estimées en corde à droite	122
4.28	Accélérations latérales mesurée et estimées en corde à droite	123
4.29	Vitesses de lacet mesurée et estimées en corde à droite	123
4.30	Forces latérales estimées et mesurées en corde à gauche	125
4.31	Dérives estimées et mesurées en corde à gauche	125
4.32	F_y/α mesurées et estimées en corde à gauche	126
4.33	Accélérations latérales mesurée et estimées en corde à gauche	126
4.34	Vitesses de lacet mesurée et estimées en corde à gauche	127

Liste des tableaux

2.1	Plan d'expérience et réponses observées	40
2.2	Matrice d'expérience du plan 2^{3-1}	43
2.3	Résolution des plans fractionnaires (P.C. = Plan complet)	47
2.4	Tableau d'analyse de la variance à un facteur avec répétitions	49
2.5	Type d'erreurs	53
2.6	Matrice d'expérience d'un CCD à deux facteurs	59
2.7	Quelques propriétés des CCD	61
3.1	Essais de validation du modèle du premier ordre	68
3.2	Niveaux des différents facteurs	73
3.3	Matrice d'expériences et résultats	74
3.4	Matrice X du modèle	75
3.5	Tableau des effets des facteurs et interactions	76
3.6	Tableau de l'analyse de la variance	78
3.7	Matrice X du modèle associé au plan 2^4	84
3.8	Matrice d'expériences du plan 2^{5-1}	85
3.9	Test d'ajustement des modèles	87
4.1	Étendues de mesure des signaux fournis par le volant dynamométrique	107
4.2	Table des résultats de comparaison simulations / essais	118
4.3	Erreurs RSME sur les signaux de sortie estimés en corde à droite	121
4.4	RSME sur les signaux de sortie estimés en corde à gauche	124

Notations

$Amor_i$: Amortissement vertical au train i ;
$APignon$: Angle de rotation du pignon de crémaillère ;
$AVolant$: Angle au volant ;
a_X	: Accélération longitudinale du véhicule au point G_V ;
a_Y	: Accélération latérale du véhicule au point G_V ;
a_Z	: Accélération verticale du véhicule au point G_V ;
b_1	: Voie avant du véhicule ;
b_2	: Voie arrière du véhicule ;
C_{Assist}	: Couple d'assistance de direction ;
$C_{Colonne}$: Couple à la colonne ;
C_{Volant}	: Couple au volant ;
C_x	: Coefficient de traînée ;
Cz_{Pneu_i}	: Amortissement vertical d'un pneumatique au train i ;
D_x	: Rigidité longitudinale de pseudo-glissement du pneumatique ;
D_y	: Rigidité de dérive du pneumatique ;
$demul$: Rapport de démultiplication ;
F_{Aero}	: Force de résistance aérodynamique à l'avancement au point G_V ;
F_{Crem}	: Effort à la crémaillère ;
$F_x ; F_{xPneu_{ij}}$: Force longitudinale à la roue ; Force longitudinale à la roue ij ;
$F_{xSusp_{ij}}$: Effort longitudinal au niveau de la suspension ;
$F_y ; F_{yPneu_{ij}}$: Force transversale à la roue ; Force transversale à la roue ij ;
$F_{ySusp_{ij}}$: Effort latéral au niveau de la suspension ;
$F_z ; F_{zPneu_{ij}}$: Force verticale à la roue ; Force verticale à la roue ij ;
$F_{zAmor_{ij}}$: Efforts verticaux d'amortissement à la roue ij ;
$F_{zBrou_{ij}}$: Effort des effets Brouilhet ;
$F_{zRaid_{ij}}$: Efforts verticaux dûs aux raideurs de la roue ij ;
$F_{zSusp_{ij}}$: Effort vertical au niveau de la suspension ;
$F_{z0Susp1}$: Effort statique de suspension pour une suspension avant ;
$F_{z0Susp2}$: Effort statique de suspension pour une suspension arrière ;
$Flex_i$: Flexibilité verticale au train i ;
$Flex_{Amont}$: Flexibilité amont en torsion de la colonne de direction ;
$Flex_{Aval}$: Flexibilité aval en torsion de la colonne de direction ;
fl_{rs_i} et fl_{rns_i}	: Flexibilités sous effort moteur/freineur roue sollicitée/roue non sollicitée ;
fm_{rs_i} et fm_{rns_i}	: Flexibilités sous couple roue sollicitée/roue non sollicitée ;
ftc_{rs_i} et ftc_{rns_i}	: Flexibilités de carrossage sous effort roue sollicitée/non sollicitée ;
ft_{rs_i} et ft_{rns_i}	: Flexibilités sous effort roue sollicitée/roue non sollicitée ;
G_V	: Centre de gravité du véhicule ;

h	: Hauteur de G_V par rapport au sol ;
h_0	: Distance de G_V à l'axe de roulis ;
I	: Matrice d'inertie du véhicule ;
i	: $i = 1$ pour le train avant et $i = 2$ pour le train arrière ;
j	: $j = 1$ pour le côté gauche et $j = 2$ pour le côté droit ;
K	: Centre de la roue ;
K_{bar_i}	: Raideur anti-roulis au train i ;
K_x	: Raideur longitudinale du pneumatique ;
K_y	: Raideur latérale du pneumatique ;
K_{zPneu_i}	: Raideur verticale d'un pneumatique au train i ;
l_1	: Empattement avant du véhicule ;
l_2	: Empattement arrière du véhicule ;
M	: Masse totale du véhicule ;
M_i	: Masse au train i ;
M_s	: Masse suspendue du véhicule ;
$M_{ns_{ij}}$: Masse non-suspendue du véhicule ;
$M_x ; M_{xPneu_{ij}}$: Moment de renversement ; Moment de renversement à la roue ij ;
M_y	: Moment de roulement ;
$M_z ; M_{zPneu_{ij}}$: Moment d'auto-alignement à la roue ; Moment d'auto-alignement à la roue ij ;
Q	: Centre de la surface de contact roue/sol ;
R_{Pignon}	: Rayon du pignon de crémaillère ;
r_0	: Rayon libre du pneumatique ;
r_{dyn}	: Rayon de roulement dynamique ;
r_{stat}	: Rayon sous charge statique ;
S_x	: Pseudo-glissement ;
V_{sx}	: Vitesse de glissement longitudinale au point Q ;
V_{sy}	: Vitesse de glissement latérale au point Q ;
$V_x ; V_{xRoue_{ij}}$: Vitesse longitudinale du pneumatique au point Q ; à la roue ij ;
$V_y ; V_{yRoue_{ij}}$: Vitesse latérale du pneumatique au point Q ; à la roue ij ;
v_X	: Vitesse longitudinale du véhicule au point G_V ;
v_Y	: Vitesse latérale du véhicule au point G_V ;
v_Z	: Vitesse verticale du véhicule au point G_V ;
$z_{Pomp_{ij}}$: Pompage (caisse/point K) à la roue ij ;
$z_{Susp_{ij}}$: Débattement vertical de la suspension à la roue ij ;
$\dot{z}_{Susp_{ij}}$: Vitesse de débattement vertical de suspension à la roue ij ;
$z_{Mns_{ij}}$: Débattement du centre roue de la roue ij ;
$\dot{z}_{Mns_{ij}}$: Vitesse de débattement du centre roue de la roue ij ;
α	: Angle de dérive du pneumatique ;
β	: Angle de dérive du véhicule ;
$\delta ; \delta_{ij}$: Angle de braquage moyen aux roues ; Angle de braquage à la roue ij ;
δ_{cij}	: Variation cinématique de braquage ;
δ_{vij}	: Variation de braquage de direction ;
δ_{Zij}	: Variation de braquage en pompage ;
ϵ_{ij}	: Coefficient de braquage induit par le roulis ;
γ	: Angle de carrossage du pneumatique ;
γ_{cij}	: Variation cinématique de carrossage ;
γ_{Zij}	: Variation de carrossage en pompage ;

λ_{ij}	: Coefficient de carrossage induit par le roulis ;
$\omega ; \omega_{ij}$: Vitesse de rotation de la roue ; Vitesse de rotation de la roue ij ;
$\vec{\omega}$: Vitesse angulaire du véhicule ;
ω_X	: Vitesse de roulis du véhicule ;
ω_Y	: Vitesse de tangage du véhicule ;
ω_Z	: Vitesse de lacet du véhicule ;
$\vec{\dot{\omega}}$: Accélération angulaire du véhicule ;
φ	: Angle de roulis du véhicule ;
ψ	: Angle de lacet du véhicule ;
θ	: Angle de tangage du véhicule ;
(X, Y, Z)	: Repère intermédiaire ;
(X_E, Y_E, Z_E)	: Repère sol ;
(X_V, Y_V, Z_V)	: Repère véhicule ;
(X_W, Y_W, Z_W)	: Repère roue ;

Liste des publications

Conférences internationales avec actes

L. Alarcon, M. Basset and E. Arnoux. *A new transient tire model based on experimental measurements*. **AVEC'12, The 11th International Symposium on Advanced Vehicle Control, September 9-12, 2012, Seoul, Korea.**

L. Alarcon, M. Basset and E. Arnoux. *Transient tire behaviour modelling*. **ISEE2013, The 2013 International Symposium On Electrical-Electronics Engineering, November, 1st, 2013, Ho Chi Minh City, Vietnam.**

Brevet

L. Alarcon, E. Arnoux, M. Basset, J. Comte et B. Dupuis . *Procédé d'évaluation du comportement d'un pneumatique lors d'une manoeuvre dynamique*. **Numéro soumission : FR 1000246890, Juillet 2014.**

Introduction Générale

La voiture de demain semble prendre forme. Elle sera électrique, connectée et autonome, c'est à dire qu'elle se substituera complètement à l'être humain. D'ores et déjà quelques milliers de véhicules communicants devraient être mis en circulation dès 2016.

Par le biais du développement de multiples fonctions avancées d'aide à la conduite et de sécurité active, il est déjà possible de parler d'autonomie partielle de conduite. En effet, ces dernières années, un grand nombre de systèmes embarqués d'aide à la conduite sont apparus dans les véhicules, comme par exemple le contrôle adaptatif de vitesse, l'alerte de franchissement de ligne, l'aide au stationnement etc... Ils utilisent des technologies de plus en plus perfectionnées qui induisent ainsi des coûts de développement important.

Les constructeurs automobiles sont actuellement très nombreux sur le marché. Ils doivent faire face à une concurrence accrue, ce qui influe fortement sur la phase de conception. Ainsi, les délais entre la phase de conception des véhicules et celle de fabrication sont de plus en plus restreints afin d'accroître la compétitivité. À cet effet, la simulation numérique se développe afin de diminuer les coûts liés au prototypage et le temps de mise au point des véhicules. Elle fait appel à des modèles génériques et fins permettant de simuler le comportement du véhicule et/ou des sous-systèmes présents dans le véhicule.

La modélisation de la dynamique des véhicules en régime statique est aujourd'hui chose bien connue. En ce qui concerne le régime transitoire, la caractérisation dynamique du comportement du véhicule ou des phénomènes physiques ressentis par les occupants du véhicule, fait depuis longtemps l'objet d'études, mais possède encore des lacunes. Tel est le cas des modèles de pneumatiques actuels qui ne retranscrivent pas correctement le comportement transitoire de cet organe, notamment lors de manœuvres d'urgence.

Il semble cependant indispensable de modéliser le pneumatique le plus précisément possible. En effet, il est le seul contact entre le véhicule et la route. Ainsi toutes les forces appliquées au véhicule (hormis les forces aérodynamiques) sont générées dans la zone de contact pneumatique/chaussée.

Le pneumatique assure trois fonctions essentielles [Duysinx, 2010] :

- Supporter la charge verticale tout en assurant un premier amortissement des sollicitations venant de la route ;
- Développer des forces longitudinales permettant d'accélérer et de freiner le véhicule ;
- Développer des forces latérales permettant de prendre des virages et de contrer des perturbations extérieures.

Il s'agit, cependant, d'un organe très sophistiqué par sa composition et son comportement très variable en fonction des conditions de roulement (température, humidité, pression de gonflage,

vitesse etc...). Sa modélisation est donc également très complexe car ses propriétés sont difficiles à prédire et à quantifier simplement.

Ces travaux de thèse réalisés au sein de la direction Systèmes Pilotés et Aides à la Conduite de RENAULT et du laboratoire MIPS (Modélisation Intelligence Processus Systèmes) de l'université de Haute Alsace, s'inscrivent dans cette problématique d'amélioration de la représentativité des modèles de pneumatiques en régime transitoire. Ainsi un nouveau modèle semi-empirique transitoire de pneumatique, basé sur un modèle simple, a été développé. La procédure d'identification de ses paramètres fait, par ailleurs, intervenir la théorie des plans d'expériences afin de respecter l'exigence industrielle importante de minimisation du nombre d'essais réels.

Le plan de ce manuscrit est le suivant :

Le chapitre 1 pose les bases nécessaires à l'étude du comportement du pneumatique et sa modélisation. Il comporte également une présentation du modèle de Pacejka (modèle de pneumatique de référence dans la littérature) et un état de l'art des modèles transitoires de pneumatique existants.

Le chapitre 2 présente la théorie des plans d'expériences. Une attention particulière est portée aux plans factoriels complets et fractionnaires qui sont très souvent utilisés lors de la première phase d'une étude, afin de « dégrossir » le problème. Lorsque l'étude est complexe et que les plans factoriels complets et fractionnaires ne sont pas suffisants pour comprendre les phénomènes, il peut être intéressant d'utiliser les plans pour surfaces de réponses. Ils sont présentés en dernière partie de ce chapitre.

Au cours du chapitre 3, une analyse fréquentielle du comportement transitoire du pneumatique est réalisée. Elle a pour but de valider (ou non) le modèle transitoire de pneumatique utilisé chez Renault, c'est à dire le modèle dit de Ballant. À l'issue de cette analyse, une nouvelle version de ce modèle est proposée ainsi qu'une procédure d'identification de ses paramètres.

Pour terminer, le chapitre 4 présente l'étape importante de validation, par le biais d'essais sur piste, du modèle développé. Une validation dite « directe » est effectuée, c'est-à-dire seulement basée sur des essais réels. Une seconde étape de validation, où le modèle de pneumatique développé est couplé avec un modèle simplifié de véhicule est également réalisée.

Le pneumatique : description et état de l'art des modèles transitoires

Sommaire

1.1	Introduction	4
1.2	Présentation générale	4
1.2.1	Structure du pneumatique	4
1.2.2	Différents types de pneumatique	5
1.2.3	Marquage du pneumatique	6
1.2.4	Mécanisme d'adhérence	7
1.3	Modélisation du pneumatique	9
1.3.1	Repères et terminologie	9
1.3.2	Classification des modèles	13
1.3.3	Modèle de Pacejka	14
1.4	État de l'art des modèles transitoires de pneumatique	17
1.4.1	Modèles transitoires Pacejka (2002)	17
1.4.2	Modèle de Ballant	20
1.4.3	Modèle Tametire	23
1.4.4	Modèles développés par le laboratoire AVDL	24
1.4.5	Modèle développé par la société General Motors	29
1.4.6	FTire	30
1.5	Conclusion	32

1.1 Introduction

La mécanique des pneumatiques, c'est-à-dire l'étude des forces générées par les pneumatiques est un passage obligé de l'étude de la dynamique des véhicules. En effet, les pneumatiques sont les seuls éléments en contact avec le sol, ainsi la plus grande partie des forces de contrôle ou de perturbations agissant sur le véhicule passent par le contact roue/sol. Par ailleurs, le pneumatique est, comme nous le verrons par la suite, un système non-linéaire complexe et difficile à modéliser.

1.2 Présentation générale

1.2.1 Structure du pneumatique

Le pneumatique est un tore élastique composé des éléments suivants (*cf.* FIGURE 1.1) :

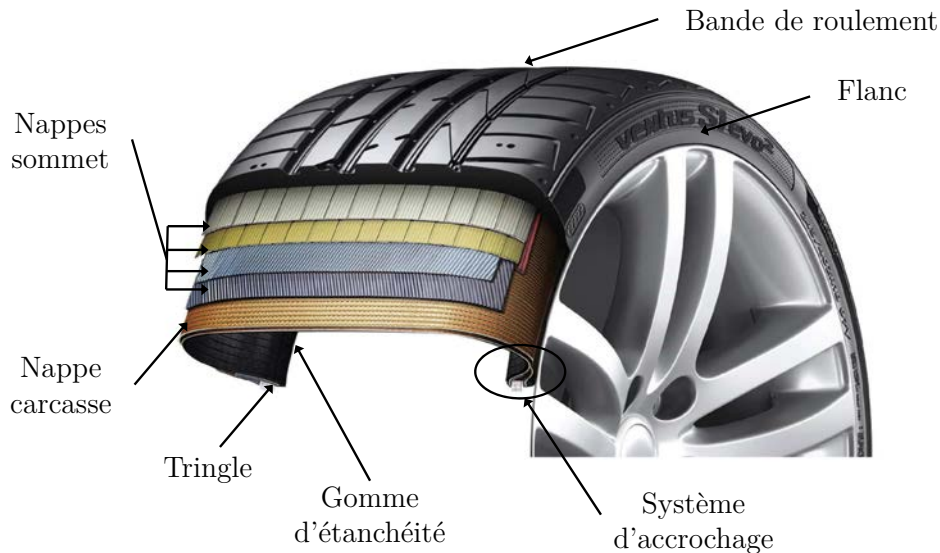


FIGURE 1.1 – Structure mécanique du pneumatique

La bande de roulement

Il s'agit d'une couche de gomme épaisse en contact avec le sol. Elle comporte des sculptures pour l'évacuation de l'eau et est composée de polymères avec un module élastique suffisamment bas pour assurer une bonne adhérence, sans opposer trop de résistance au roulement.

Les nappes de sommet

Les nappes sommet sont constituées d'au moins deux nappes croisées de fils métalliques qui permettent de transmettre les efforts longitudinaux et transversaux à la carcasse.

La nappe de carcasse

La nappe carcasse est constituée de fils textiles ou d'acier qui assurent l'essentiel de la rigidité

du pneumatique.

Le flanc

Cette partie du pneumatique composée d'une gomme souple, protège la carcasse des chocs et assurent la souplesse du pneumatique.

La gomme d'étanchéité ou gomme intérieure

Cette gomme assure l'étanchéité de l'enveloppe et évite ainsi une perte de pression.

Le système d'accrochage

Le système d'accrochage permet d'effectuer la liaison pneumatique / jante grâce à deux anneaux métalliques (les tringles) prenant appui sur la jante au niveau du talon. Il assure la transmission des efforts générés par le pneumatique à la jante.

1.2.2 Différents types de pneumatique

Il existe trois grands types d'architecture de pneumatique : l'architecture diagonale, croisée ceinturée ou radiale [OXY, 2014] (cf. FIGURE 1.2).

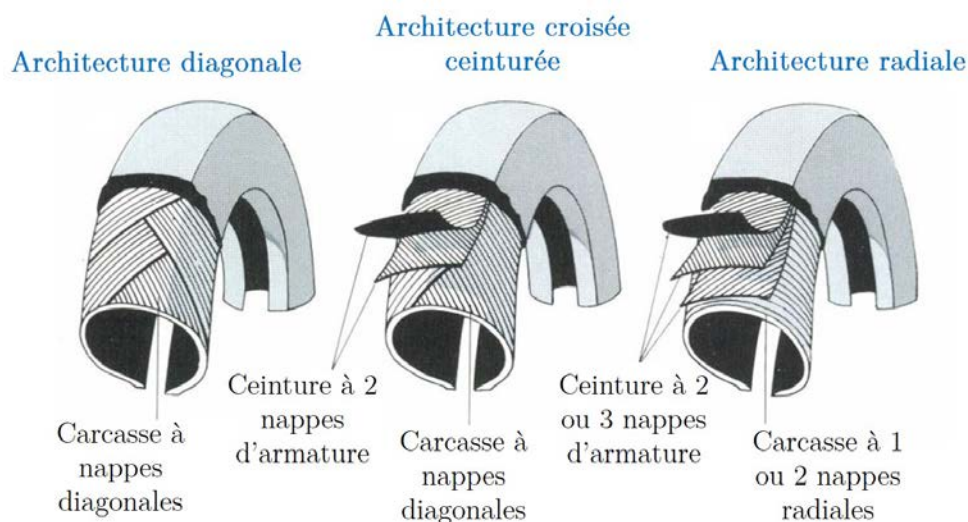


FIGURE 1.2 – Les différentes architectures de pneumatiques [LAR, 1976]

L'**architecture diagonale** est la plus ancienne des architectures. Elle décrit une structure pneumatique dont les câbles des couches s'étendent jusqu'aux talons et sont orientés de façon à former des angles alternés inférieurs à 90° par rapport à la ligne médiane de la bande de roulement. Au niveau du pneumatique, la lettre « *D* » apparaît avant l'indication du diamètre de jante pour indiquer cette architecture.

L'**architecture croisée ceinturée** (ou « *Bias Belted* » en anglais) décrit une structure pneumatique de type « diagonal » dans laquelle la carcasse est bridée par une ceinture formée de deux ou plusieurs couches de câbles presque inextensibles, formant des angles alternés proches de ceux de la carcasse. Au niveau du pneumatique, la lettre « *B* » apparaît avant l'indication du diamètre

de jante pour indiquer cette architecture.

L'**architecture radiale** décrit une structure pneumatique dont les câbles s'étendent jusqu'aux talons et sont orientés de façon à former un angle proche de 90° , par rapport à la ligne médiane de la bande de roulement. Par ailleurs, la carcasse est stabilisée par une ceinture circonférentielle presque inextensible. Au niveau du pneumatique, la lettre « R » apparaît avant l'indication du diamètre de jante pour indiquer cette architecture.

1.2.3 Marquage du pneumatique

Un schéma des différents marquages inscrits sur le pneumatique est présenté FIGURE 1.3. Afin de désigner un pneumatique, certaines de ses caractéristiques sont utilisées : la marque et le nom du pneumatique, sa section, sa série, son type de carcasse, son diamètre intérieur, son indice de charge ainsi que son indice de vitesse.

Par exemple, le pneumatique étudié lors de ces travaux est du type MICHELIN ENERGY™ SAVER 195/65R15 95T. Il s'agit donc d'un pneumatique de la marque MICHELIN, et de la gamme ENERGY™ SAVER. La largeur du pneumatique vaut 195 mm, le rapport d'aspect (rapport exprimé en pourcentage en divisant la hauteur du pneumatique par sa largeur) est égal à 65%, il s'agit d'un pneumatique à structure radiale et son diamètre intérieur vaut 15 pouces. L'indice de charge est un code numérique correspondant à la charge maximum que le pneumatique peut supporter à la pression recommandée. L'indice 95 correspond à 690 kg (cf. FIGURE 1.4). L'indice de vitesse indique la vitesse maximum que le pneumatique peut supporter. L'indice T correspond à 190 km/h (cf. FIGURE 1.4).

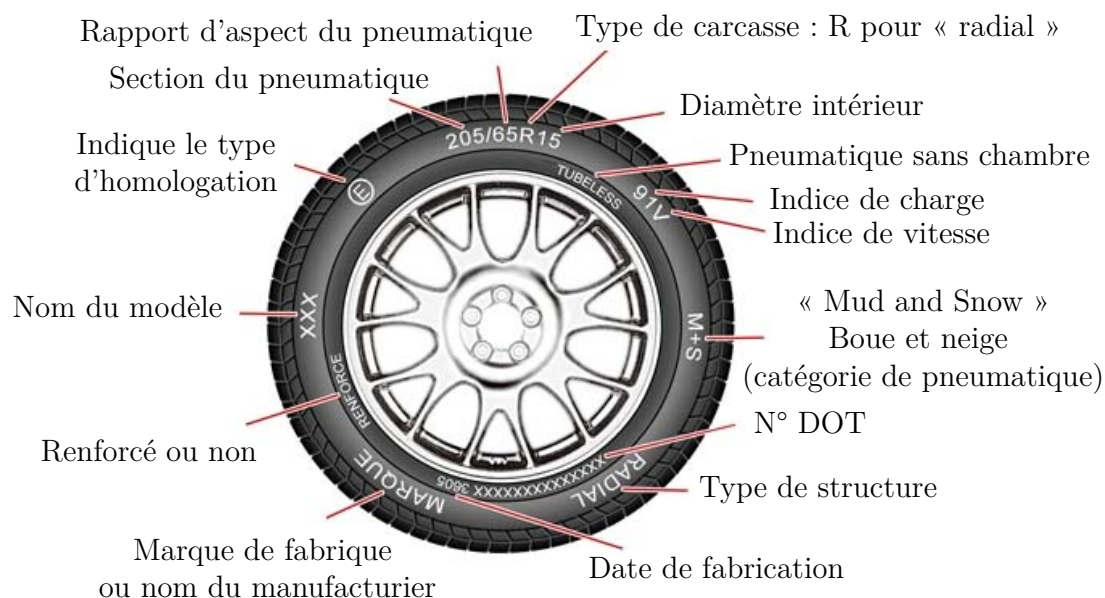


FIGURE 1.3 – Le marquage du pneumatique

INDICE DE CHARGE

Indice de charge	Poids en kg	Indice de charge	Poids en kg	Indice de charge	Poids en kg	Indice de charge	Poids en kg
20	80	55	218	79	437	101	825
22	85	58	218	80	450	102	850
24	85	59	243	81	462	103	875
26	90	60	250	82	485	104	900
28	100	61	257	83	487	105	925
30	106	62	265	84	500	106	950
31	109	63	272	85	515	107	975
33	115	64	280	86	530	108	1000
35	121	65	290	87	545	109	1030
37	128	66	300	88	560	110	1060
40	136	67	307	89	580	111	1090
41	145	68	315	90	600	112	1120
42	150	69	325	91	615	113	1150
44	160	70	335	92	630	114	1180
46	170	71	345	93	650	115	1215
47	175	72	355	94	670	116	1250
48	180	73	365	95	690	117	1285
50	190	74	375	96	710	118	1320
51	195	75	387	97	730	119	1360
52	200	76	400	98	750	120	1400
53	206	77	412	99	775		
54	212	78	425	100	800		

INDICE DE VITESSE

Indice de vitesse	Vitesse en km/h	Indice de vitesse	Vitesse en km/h	Indice de vitesse	Vitesse en km/h
A1	5	D	65	Q	160
A2	10	E	70	R	170
A3	15	F	80	S	180
A4	20	G	90	T	190
A5	25	J	100	U	200
A6	30	K	110	H	210
A7	35	L	120	V	240
A8	40	M	130	ZR	> 240
B	50	N	140	W	270
C	60	P	150	Y	300

FIGURE 1.4 – Indices de charge et de vitesse du pneumatique [OXY, 2014]

1.2.4 Mécanisme d'adhérence

Comme nous l'avons énoncé en introduction, le pneumatique fait l'interface entre le véhicule et la route. Sa capacité à transmettre les efforts est donc primordiale pour une bonne tenue de

route. Nous proposons ainsi de présenter dans cette section le mécanisme d'adhérence intervenant entre la roue et le sol.

Le phénomène d'adhérence fait intervenir deux mécanismes de sollicitation sous l'effet d'un glissement relatif entre l'élastomère et le sol : l'indentation et l'adhésion.

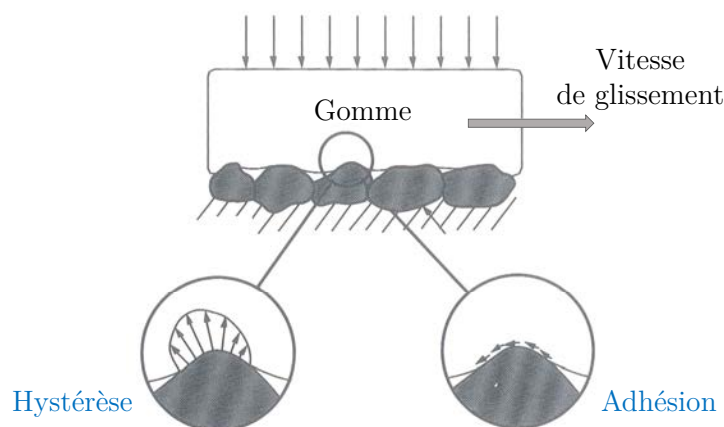


FIGURE 1.5 – Le mécanisme d'adhérence

La société Michelin définit ces deux mécanismes de la manière suivante [MIC, 2001] :

Phénomène d'indentation

La souplesse de la gomme lui permet d'épouser la forme des aspérités du sol. Lorsqu'un bloc de gomme glisse sur le sol, sa déformation, parce que le matériau est visqueux, se produit comme un écoulement : le bloc vient buter contre l'aspérité, se déforme, mais, par un effet d'hystérèse (*cf.* FIGURE 1.5), ne redescend pas immédiatement à sa hauteur initiale de l'autre côté de l'aspérité.

Pour cela, il est nécessaire que la route présente des aspérités comprises entre quelques microns et quelques millimètres. Ce phénomène existe également en présence d'eau sur la chaussée.

Phénomène d'adhésion

L'adhésion résulte d'interactions moléculaires se produisant au niveau de l'interface gomme/sol (*cf.* FIGURE 1.5). Il s'agit très vraisemblablement de liaisons de Van der Waals [Queslel, 2007]. Ces liaisons se forment, s'étirent puis se rompent pour se reformer plus loin. La condition essentielle pour que l'adhésion entre en jeu est que la gomme soit en contact direct avec le sol (distance entre la gomme et le sol inférieure à 10^{-6} mm).

Pour résumer, le cycle de sollicitation des molécules au niveau de l'interface gomme/sol est le suivant :

- la liaison se crée ;

- la chaîne moléculaire est étirée (création d'une force de frottement qui s'oppose au glissement) ;
- la liaison se rompt, pour se reformer plus loin.

Après cette présentation très générale du pneumatique, nous rappelons, dans les sections suivantes, les bases de la modélisation du pneumatique, puis nous dressons un état de l'art des modèles de pneumatique pour l'étude du comportement transitoire du véhicule.

1.3 Modélisation du pneumatique

1.3.1 Repères et terminologie

Trois principaux repères liés au pneumatique apparaissent dans la littérature. : le repère SAE (« *Society of Automotive Engineers* »), le repère ISOW-Q (« *International Organization for Standardization* ») et le repère de Pacejka (cf. section 1.3.3). Dans notre étude, le système local utilisé pour décrire le comportement du pneumatique est le repère ISOW-Q (X_W , Y_W , Z_W) [ISO, 2011] . À la FIGURE 1.6, les efforts longitudinaux, latéraux et verticaux ainsi que les moments d'auto-alignement (voir ci-dessous) ont été représentés dans chaque repère.

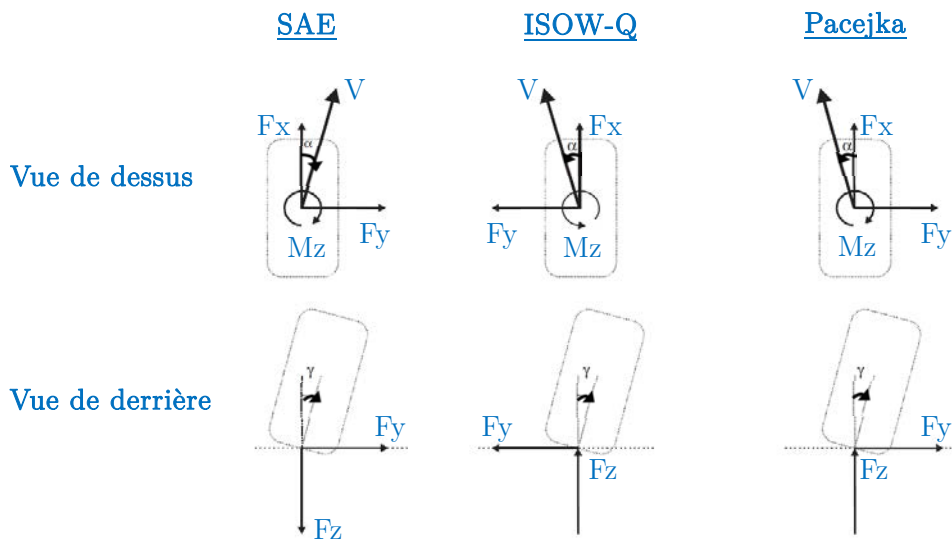


FIGURE 1.6 – Les différents repères liés au pneumatique

Dans ce repère (cf. FIGURE 1.7), il est possible de définir certaines caractéristiques géométriques liées au pneumatique :

- **Le plan de la roue** : Plan central de la roue qui est normal à l'axe de rotation ;
- **Le centre de la roue, le point K** : Intersection du plan de la roue et de son axe de rotation ;

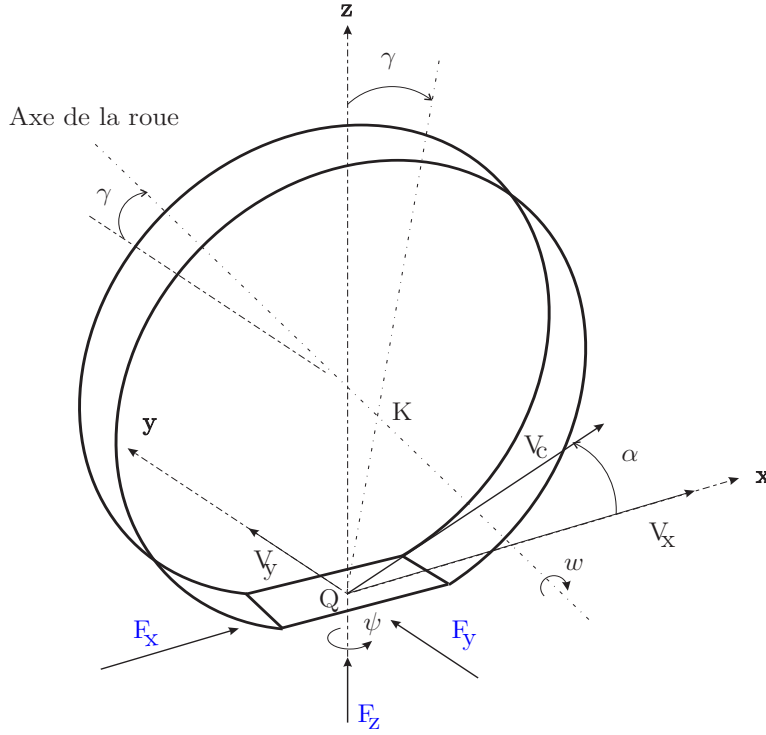


FIGURE 1.7 – Notations dans la repère ISOW-Q (W pour « *Wheel* », Q point de contact roue/sol) [Kiébré, 2010]

- **Le centre de la surface de contact roue/sol, le point Q** : Intersection du plan de la roue avec la projection de l'axe de rotation sur le plan de la route ;
- **Le rayon sous charge statique r_{stat}** : Distance du centre de la roue (point K) au point conventionnel de contact au sol (point Q) dans des conditions données de charge et de pression, à l'arrêt ;
- **Le rayon de roulement dynamique r_{dyn}** :

$$r_{dyn} = C_R / 2\pi \quad (1.1)$$

où C_R désigne la circonférence de roulement dynamique, c'est-à-dire la distance parcourue au sol pour un tour de roue dans des conditions spécifiées de charge, de pression etc...

Les variables angulaires suivantes sont également d'un grand intérêt dans la description du comportement du pneumatique :

- **La vitesse de rotation d'une roue ω** : Vitesse angulaire d'une roue autour de son axe de rotation. Cette vitesse est positive « en marche avant » ;
- **L'angle de dérive α** : Angle entre l'axe X_W (cf. repère roue FIGURE 4.7) et la tangente à la trajectoire du point conventionnel de contact au sol. Cet angle est positif dans le sens

trigonométrique ;

- **L'angle de carrossage γ** : Angle entre l'axe Z_W et le plan de la roue. Cet angle est positif dans le sens anti-trigonométrique.

De plus, dans ce repère, l'action exercée par le sol sur le pneumatique est définie par un torseur de forces et moments dont les composantes sont :

- **La force longitudinale à la roue F_x** : C'est la projection sur l'axe X_W de la réaction du sol sur la roue.

Cet effort dépend fortement du **pseudo-glisement S_x** qui caractérise l'écart relatif entre la vitesse longitudinale du centre roue v_X et la vitesse $\omega.r_{eff}$ du pneumatique par rapport au sol s'il y avait roulement sans glissement. Cette grandeur se définit, en pourcentage, de la façon suivante :

Dans le cas d'un freinage, S_x est toujours négatif :

$$S_x = \left(\frac{\omega.r_{eff} - v_X}{v_X} \right) * 100 \quad (1.2)$$

Dans le cas d'une accélération, S_x est toujours positif :

$$S_x = \left(\frac{\omega.r_{eff} - v_X}{\omega.r_{eff}} \right) * 100 \quad (1.3)$$

avec ω la vitesse angulaire de la roue et r_{eff} le rayon effectif de roulement du pneumatique (ou rayon dynamique).

Ainsi $S_x = -100\%$, traduit le blocage de la roue lors d'un freinage et $S_x = 100\%$ le patinage de la roue lors d'une accélération.

Dans le cas de faibles pseudo-glissements (*cf.* FIGURE 1.8 - zone 1), il est possible d'écrire la relation linéaire suivante :

$$F_x = D_x.S_x \quad (1.4)$$

avec **D_x la rigidité longitudinale de pseudo-glisement.**

En fait, la zone 1 correspond à une zone dite d'adhérence. La zone 2 est une zone non-linéaire dite de transition et la zone 3 caractérise une zone de glissement. Le pseudo-glisement vaut environ trois à quatre pour-cents sur sol sec.

- **La force transversale à la roue F_y** : C'est la projection sur l'axe Y_W de la réaction du sol sur la roue.

Le pneumatique délivre un effort transversal et se déforme transversalement en même temps qu'il roule. Cette déformation fait qu'il existe un angle entre le plan de la roue et sa vitesse comme l'illustre la FIGURE 1.9. Cet angle noté α est appelé angle de dérive. L'effort transversal noté F_y est appelé poussée de dérive.

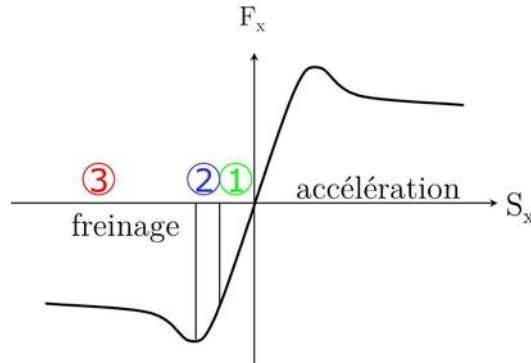


FIGURE 1.8 – Effort longitudinal fonction du pseudo-glissement

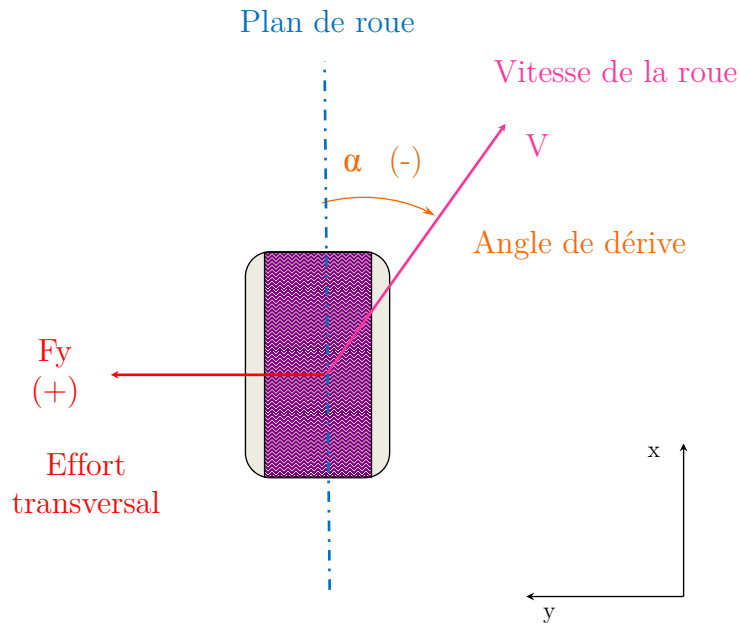


FIGURE 1.9 – Dérive et effort transversal : notations et convention

De manière analogue à l'effort longitudinal, il existe une courbe caractéristique de variation de la force transversale en fonction de la dérive (*cf.* FIGURE 1.10).

La zone 1 correspond à une zone linéaire dite d'adhérence où $F_y = -D_y \cdot \alpha$ avec D_y la **rigidité de dérive**. La zone 2 est une zone non-linéaire dite de transition et la zone 3 une zone correspondant à un dérapage ou glissement.

- **La force verticale à la roue F_z** : C'est la projection sur l'axe Z_W de la réaction du sol sur la roue ;

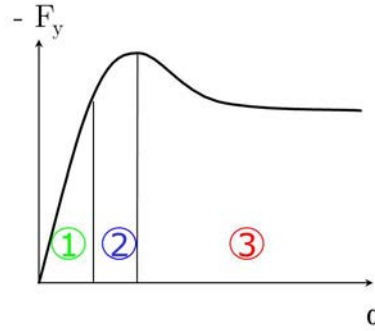


FIGURE 1.10 – Effort transversal (N) fonction de la dérive (°)

- **Le moment de renversement M_x** : C'est la projection sur l'axe X_W de la somme des moments appliqués à la roue et tendant à faire pivoter la roue autour de l'axe X_W ;
- **Le moment de roulement M_y** : C'est la projection sur l'axe Y_W de la somme des moments appliqués à la roue et tendant à faire pivoter la roue autour de l'axe Y_W .
En marche avant, ce moment est positif ou nul : il s'agit d'un couple moteur. En marche arrière, ce moment est négatif : il s'agit d'un couple freineur de résistance au roulement.
- **Le moment d'auto-alignement M_z** : C'est la projection sur l'axe Z_W de la somme des moments appliqués à la roue et tendant à faire pivoter la roue autour de l'axe Z_W .

1.3.2 Classification des modèles

Les modèles de pneumatiques sont souvent classés selon trois catégories : les modèles physiques, les modèles empiriques et les modèles à éléments finis.

Les modèles physiques sont principalement fondés sur une étude de la structure physique du pneumatique, plus précisément de sa déformation, ceci afin de prédire son comportement. Ce type de modèle, par son caractère « physique » est facilement compréhensible et adaptable en fonction des objectifs à atteindre. Cependant, les phénomènes du pneumatique étant très complexes, ce sont des modèles difficiles à caractériser et par le passé, ils se sont avérés trop complexes à être utilisés. Il existe une multitude de modèles quasi-statiques physiques, de pneumatiques dans la littérature comme le « *Brush model* » (modèle de la brosse), le modèle de Fiala, le modèle de Sakai etc...

Les modèles empiriques contiennent des lois souvent basées sur des mesures effectuées en amont ou sur des interpolations. Ce sont des modèles très représentatifs de leur domaine d'étude, qui est, en général, restreint en comparaison avec un modèle physique. Ces modèles empiriques (ou semi-empiriques) sont nombreux dans la littérature. Nous pouvons par exemple citer le modèle de Dugoff, le modèle de Kamm etc.. Dans sa thèse « *Contribution to the modelling of aircraft tyre-road interaction* » [Kiébré, 2010], R. Kiébré présente plus en détails les modèles quasi-statiques physiques et semi-empiriques de pneumatique.

Pour terminer, les **modèles à éléments finis** sont utilisés lors d'analyses détaillées de la structure du pneumatique. Ils sont utilisés, par exemple, pour les calculs vibro-acoustiques, pour le dessin des sculptures et l'évacuation de l'eau ... Ils deviennent très rapidement complexes avec des modèles d'ordres élevés.

Pour notre étude, nous nous sommes principalement intéressés aux modèles physiques ou semi-empiriques de pneumatiques, pour leurs avantages en terme de complexité et de précision de calcul. La section suivante comporte une présentation du modèle de Pacejka (« *Magic Formula* »), modèle de pneumatique semi-empirique utilisé dans beaucoup de laboratoires et entreprises. Celui-ci sera pris comme référence dans notre étude.

1.3.3 Modèle de Pacejka

« La formule magique » (« *Magic Formula* » ou MF) de H. B. Pacejka est un modèle de pneumatique semi-empirique devenu une référence depuis de nombreuses années. Né d'une coopération entre TU-Delft et Volvo dans les années 80, il permet une bonne approximation des courbes des forces F_x et F_y ainsi que du moment M_z (cf. FIGURE 1.11) [Bakker *et al.*, 1989] [Pacejka, 2005] [Pacejka, 2012] [Goryca, 2010].

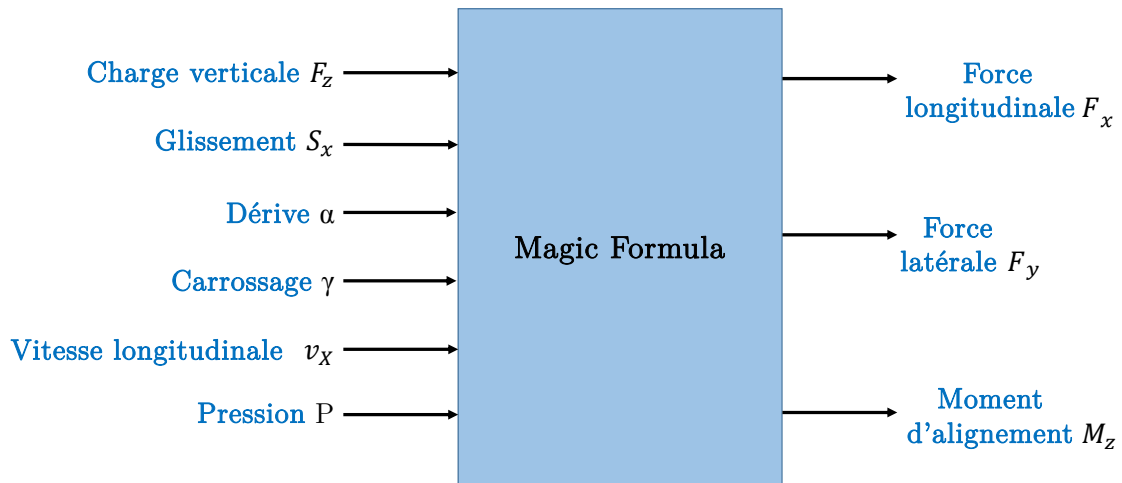


FIGURE 1.11 – Entrées-sorties de « la formule Magique » de Pacejka

La forme générale de « la formule magique » est la suivante :

$$y = D \cdot \sin[C \cdot \arctan\{(1 - E) \cdot B \cdot x + E \cdot \arctan(B \cdot x)\}] \quad (1.5)$$

et

$$Y(X) = y(x) + S_V \quad (1.6)$$

avec

$$x = X + S_H \quad (1.7)$$

où X est la variable d'entrée, c'est-à-dire, le pseudo-glissement S_x (%) ou la dérive α (rad). Par ailleurs, Y désigne la variable de sortie qui vaut, soit la force longitudinal F_x , soit la force latérale

F_y , soit le moment d'alignement M_z .

De plus, les coefficients B , C , D , E , S_H et S_V sont les macro-coefficients de « la formule magique ». Ils représentent (cf. FIGURE 1.12) :

B : le facteur de rigidité ;

C : le facteur de forme de la courbe ;

D : la valeur de pic par rapport à l'axe x ;

E : le facteur de courbure ;

S_H : le décalage horizontal ;

S_V : le décalage vertical.

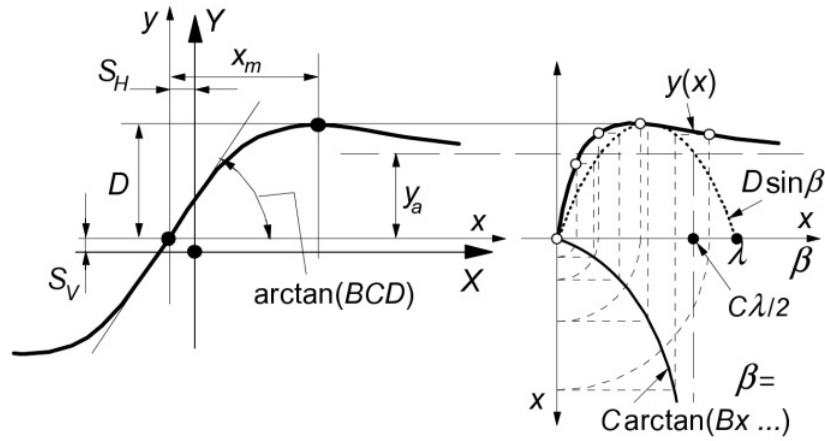


FIGURE 1.12 – Courbe de la version sinusoïdale de « la formule magique » [Pacejka, 2012]

BCD représente ainsi la pente à l'origine de la courbe. Il est possible de déterminer la valeur du facteur C à partir de la valeur de pic D et de l'asymptote horizontale y_a , tels que :

$$C = 1 \pm \left(1 - \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin\left(\frac{y_a}{D}\right)\right) \quad (1.8)$$

Le paramètre E permet de contrôler la valeur du glissement maximum x_m . Connaissant la position du pic x_m et les valeurs des facteurs B et C , le calcul de ce facteur s'écrit (si $C > 1$) :

$$E = \frac{B \cdot x_m - \tan(\pi/2C)}{B \cdot x_m - \arctan(B \cdot x_m)} \quad (1.9)$$

Il existe également une version cosinus de « la formule magique » de Pacejka. Elle permet, par exemple, de calculer la chasse du pneumatique.

L'angle de chasse est l'angle formé par l'axe de braquage de la roue (axe de pivot) et la verticale dans le plan longitudinal du véhicule (cf. FIGURE 1.13). Il participe à la stabilité de la direction et au retour des roues directrices en ligne droite.

Par ailleurs, le **déport de chasse** (aussi noté très souvent chasse au sol) caractérise la distance entre le point de contact Q du pneumatique avec le sol et la projection de l'axe de pivotement de la roue au sol (cf. FIGURE 1.13).

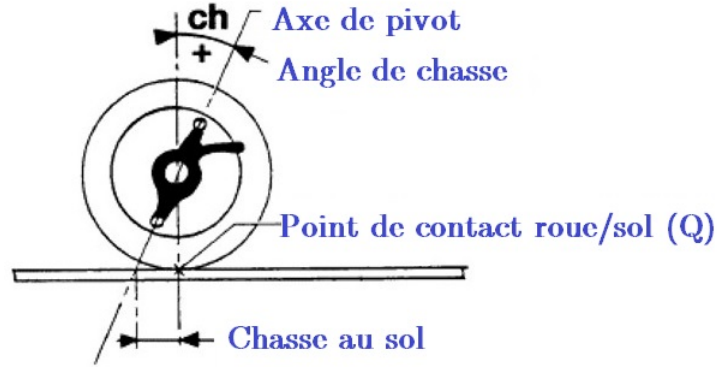


FIGURE 1.13 – Angle de chasse et chasse au sol

« La formule magique », sous forme cosinus, permettant de calculer la chasse (en anglais « trail » t) est la suivante :

$$t(\alpha_t) = D_t \cdot \cos[C_t \cdot \arctan\{B_t \cdot \alpha_t - E_t(B_t \cdot \alpha_t - \arctan(B_t \cdot \alpha_t))\}] \quad (1.10)$$

où :

$$\alpha_t = \tan \alpha + S_{Ht} \quad (1.11)$$

S_{Ht} désigne le décalage horizontal de la courbe de chasse. Un exemple de courbe obtenu avec la version cosinus de la « la formule magique » a été représenté FIGURE 1.14.

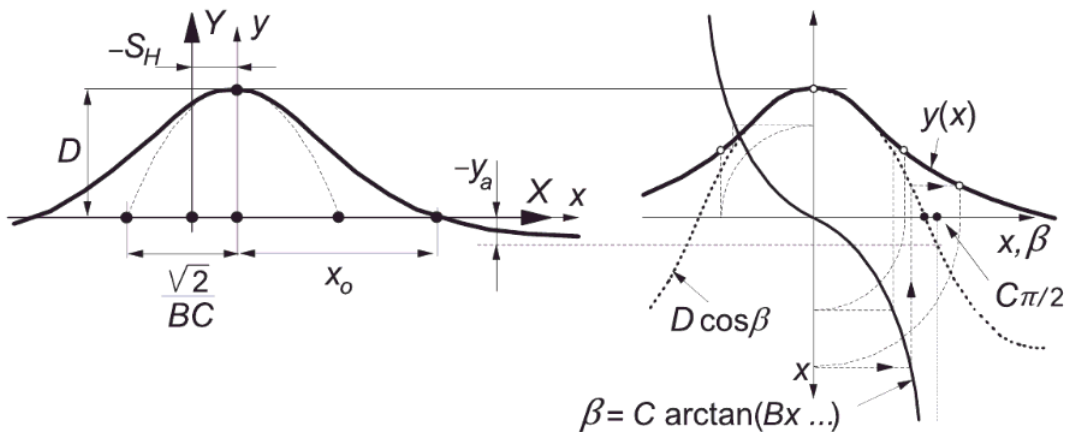


FIGURE 1.14 – Courbe de la version cosinus de « la formule magique » [Pacejka, 2012]

Une présentation plus détaillée des équations de Pacejka et de leurs paramètres est disponible à l'annexe B. Après cette introduction aux principaux types de modèles de pneumatiques, nous proposons, dans la partie suivante, un état de l'art des modèles transitoires de pneumatiques existants.

1.4 État de l'art des modèles transitoires de pneumatique

1.4.1 Modèles transitoires Pacejka (2002)

« La formule magique » de Pacejka a également subi des évolutions, dans le but de prendre en compte le comportement transitoire du pneumatique. Dans la version Pacejka 2002, aussi appelée PAC 2002, deux approches transitoires ont été développées [Pacejka, 2002] [Jaiswal *et al.*, 2010] [Kuiper et Van Oosten, 2007] : le « *Stretched-String model* » et le « *Contact mass model* ». Nous allons brièvement les décrire dans les paragraphes suivants.

1.4.1.1 « *Stretched-String model* »

Ce modèle est fondé sur le principe d'un point de contact unique avec le sol. Ce sont des ressorts positionnés longitudinalement et latéralement qui modélisent le lien entre la surface de contact avec le sol et la jante (*cf.* FIGURE 1.15).

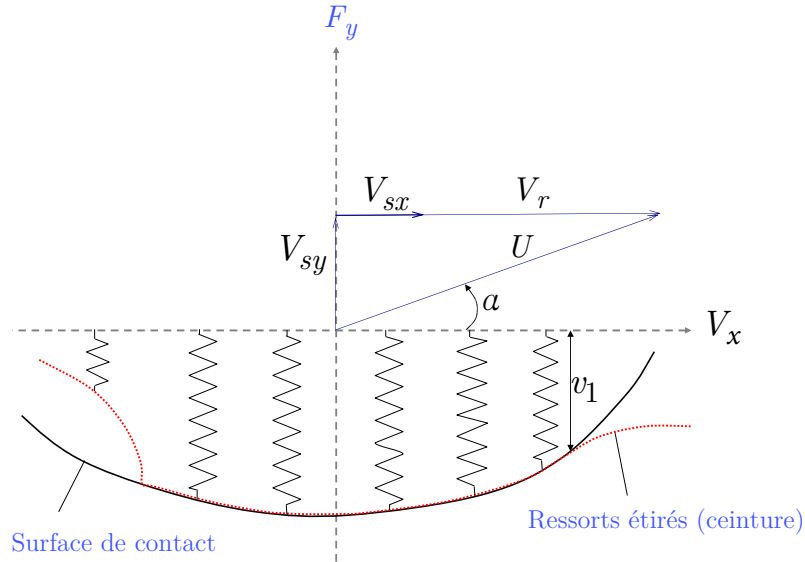


FIGURE 1.15 – Vue de dessus du « *Stretched-String model* »

La dérive et le pseudo-glissement sont deux paramètres clés dans l'étude du comportement transitoire du pneumatique. Dans ce modèle, une équation du premier ordre est utilisée afin de calculer ces deux derniers.

Le calcul de la dérive fait intervenir **la longueur de relaxation latérale** qui, fonction de la charge, est estimée de la manière suivante :

$$\sigma_\alpha = p_{Ty1} F_{z0} \sin \left[2 \arctan \left(\frac{F_z}{p_{Ty2} F_{z0}} \right) \right] (1 - p_{Ky3} |\gamma_y|) r_0 \quad (1.12)$$

avec :

F_{z0} : La charge nominale de référence ;

F_z : La charge verticale du pneumatique ;

p_{Ty1} : L'amplitude maximum de la longueur de relaxation latérale (p_T , T pour transitoire) ;

p_{Ty2} : Le facteur de forme de la longueur de relaxation latérale (p_T , T pour transitoire) ;

p_{Ky3} : La variation de la raideur en virage/charge nominale avec carrossage ;

γ_y : La variation de carrossage ;

r_0 : Le rayon libre du pneumatique.

Ainsi, **l'angle de dérive** (« ' » pour transitoire) utilisé dans la formule magique de Pacejka permettant de calculer la force longitudinale, la force latérale et le moment M_z , est donné par :

$$\alpha' = \arctan \left(\frac{v_1}{\sigma_\alpha} \right) \quad (1.13)$$

avec v_1 le déplacement latéral du point de contact et σ_α la longueur de relaxation latérale calculée précédemment.

Par ailleurs ce **déplacement latéral** vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\sigma_\alpha \frac{dv_1}{dt} + |V_x| v_1 = \sigma_\alpha V_{sy} \quad (1.14)$$

où V_x est la vitesse longitudinale du véhicule, projetée sur le plan de roue et V_{sy} la vitesse de glissement latérale.

De la même manière, **la longueur de relaxation longitudinale** est exprimée comme suit :

$$\sigma_{S_x} = F_z (p_{Tx1} + p_{Tx2} df_z) \exp(p_{Tx3} df_z) \left(\frac{r_0}{F_{z0}} \right) \quad (1.15)$$

avec :

p_{Tx1} : La longueur de relaxation longitudinale à charge nominale (p_T , T pour transitoire) ;

p_{Tx2} : La variation de la longueur de relaxation longitudinale en charge (p_T , T pour transitoire) ;

p_{Tx3} : La variation de la longueur de relaxation longitudinale avec la charge en exposant (p_T , T pour transitoire) ;

df_z : Incrément de la charge verticale.

On peut donc en déduire **le pseudo-glissement** (« ' » pour transitoire) :

$$S'_x = \frac{u_1}{\sigma_{S_x}} \text{sign}(V_x) \quad (1.16)$$

sachant que le **déplacement longitudinal** du point de contact suit l'équation différentielle suivante :

$$\sigma_{S_x} \frac{du_1}{dt} + |V_x| u_1 = -\sigma_{S_x} V_{sx} \quad (1.17)$$

où V_{sx} est la vitesse de glissement longitudinale.

Dans sa construction, ce modèle semble intéressant, car via le calcul de longueurs de relaxation, une notion de retard au niveau de la réponse transitoire du pneumatique est introduite dans le calcul de la dérive et du pseudo-glisement. Cependant, la procédure d'identification des paramètres n'est pas fournie. Ainsi, nous ne sommes pas parvenus à obtenir des résultats satisfaisants en essayant « d'intuiter » les valeurs des paramètres.

1.4.1.2 « *Contact mass model* »

Dans le modèle précédent, les propriétés de la carcasse et celles du contact roue/sol sont liées et donc leur modélisation est simultanée. Dans le « *Contact mass model* », ces propriétés sont séparées et la carcasse est modélisée par des ressorts (*cf.* FIGURE 1.16).

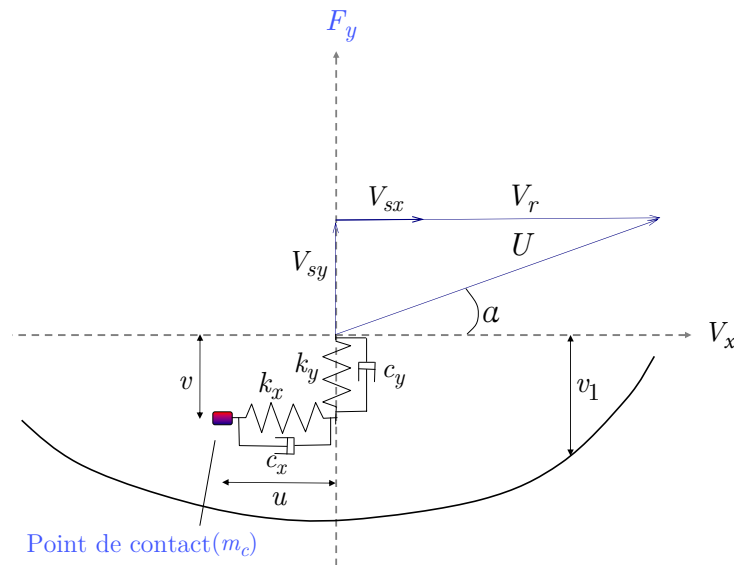


FIGURE 1.16 – Vue de dessus du « *Contact mass model* »

Les équations différentielles du mouvement de ce modèle sont les suivantes :

$$m_c \left(\frac{dV_{cx}}{dt} \right) + c_x \frac{du}{dt} + k_x u = F_{sx} \quad (1.18)$$

$$m_c \left(\frac{dV_{cy}}{dt} \right) + c_y \frac{dv}{dt} + k_y v = F_{sy} \quad (1.19)$$

avec :

V_{cx} et V_{cy} : Les vitesses de glissement longitudinale et latérale de la partie en contact ;

m_c : La masse du point de contact ;

k_x et k_y : Les rigidités respectivement longitudinale et latérale de la carcasse ;

c_x et c_y : Les constantes d'amortissement respectivement longitudinale et latérale.

Les déformations de la partie en contact, longitudinalement (u) et latéralement (v), peuvent être calculées avec les équations différentielles suivantes :

$$\frac{du}{dt} = V_{cx} - V_{sx} \quad (1.20)$$

$$\frac{dv}{dt} = V_{cy} - V_{sy} \quad (1.21)$$

avec V_{sx} et V_{sy} , les vitesses de glissement longitudinale et latérale du point en glissement, localisé à r_{eff} du centre de roue (rayon effectif).

De plus, ce modèle permet de calculer **les paramètres de glissement (transitoires)**, en utilisant la longueur de relaxation σ_c :

$$\sigma_c \frac{dS'_x}{dt} + |V_x| S'_x = -V_{cx} \quad (1.22)$$

$$\sigma_c \frac{d\alpha'}{dt} + |V_x| \alpha' = V_{cy} \quad (1.23)$$

En outre, à partir de ce modèle, il est possible de calculer **les forces longitudinale et latérale** qui sont appliquées à la jante :

$$F_{xa} = c_x \frac{du}{dt} + k_x u \quad (1.24)$$

$$F_{ya} = c_y \frac{dv}{dt} + k_y v \quad (1.25)$$

La notion de retard lors du régime transitoire est bien présente dans la définition du pseudo-glissement et de la dérive, par le biais des équations du premier ordre. Par ailleurs, le calcul des efforts fait intervenir les effets de ressorts et amortisseurs, qui peuvent être « physiquement » ressentis lors d'une manœuvre transitoire. Ainsi, comme le modèle précédent, dans sa définition, ce modèle semble intéressant. Cependant, la procédure d'identification des paramètres n'est pas fournie. Ainsi, nous ne sommes pas parvenus à obtenir des résultats satisfaisants en essayant « d'intuiter » les valeurs des paramètres.

1.4.2 Modèle de Ballant

1.4.2.1 Présentation

Il s'agit du modèle transitoire de pneumatiques utilisé chez Renault.

Lorsqu'un effort transversal F_y s'exerce sur une roue, la flexion du pneumatique provoque une translation de la jante par rapport à la bande de roulement. Celle-ci se nomme le Ballant.

Afin de représenter ce phénomène, le pneumatique est modélisé par une succession d'éléments symbolisant les pains de gomme, reliés entre eux et avec la jante par des ressorts (*cf.* FIGURE 1.17). Les ressorts longitudinaux, très rigides, symbolisent la ceinture du pneumatique. Les ressorts latéraux, moins rigides que les précédents, représentent l'enveloppe du pneumatique. Sur le schéma, les pains de gomme en contact avec le sol sont de couleur plus claire que les autres [Martin, 2003].

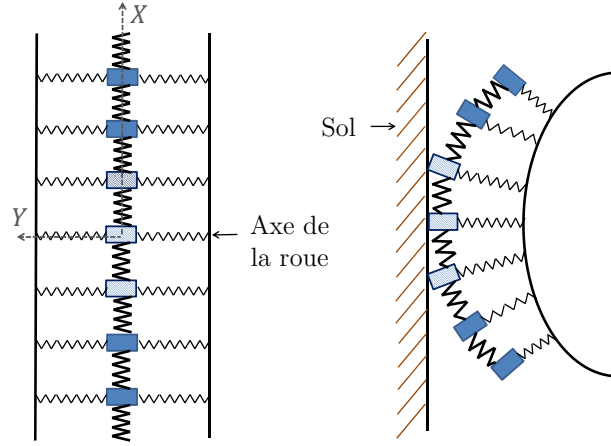


FIGURE 1.17 – Schéma du pneumatique fondé sur des ressorts

En roulement, l'élément 2 (*cf.* FIGURE 1.18) entre en contact avec le sol et le pavé 5 perd le contact avec le sol. La mise sous tension des liaisons élastiques crée un déplacement de la jante vers la droite. Les éléments dans la zone de contact sont alignés sur la direction de déplacement et définissent l'angle de dérive α .

FIGURE 1.19, une vue de dessus du pneumatique est présentée afin de rappeler le repère utilisé.

1.4.2.2 Mise en équations

Par définition de la dérive, nous avons :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\dot{y}_s}{v_X}\right) \quad (1.26)$$

Comme nous travaillons avec des angles de dérive ne dépassant pas 15° , on peut écrire :

$$\alpha = \frac{\dot{y}_s}{v_X} \quad (1.27)$$

Par ailleurs, la force latérale liée à l'effet « ressort » de Ballant se calcule de la manière suivante :

$$F_y = K_y \cdot \Delta y \quad (1.28)$$

où $\Delta y = (y_s - y_r)$, caractérise la translation de la jante (y_r) par rapport à la bande de roulement (y_s) et K_y désigne la raideur latérale du pneumatique.

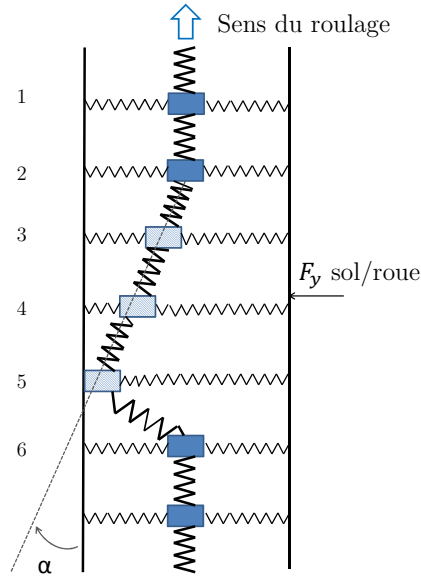
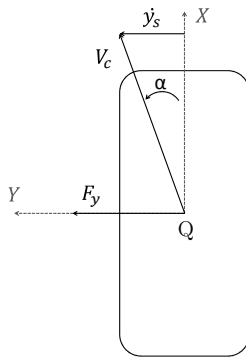


FIGURE 1.18 – Schéma du pneumatique en roulement : les pains de gomme se déforment et se déplacent latéralement



Avec :

$\dot{y}_s = V_y$, la vitesse latérale au point Q

V_c , la vitesse roue/sol au point Q

FIGURE 1.19 – Schéma du pneumatique vue du dessus

En utilisant les propriétés du pneumatique, F_y s'écrit également :

$$F_y = -D_y \cdot \alpha \quad (1.29)$$

avec D_y la rigidité de dérive du pneumatique.

En dérivant l'équation (1.28), on obtient :

$$\dot{F}_y = K_y \cdot (\dot{y}_s - \dot{y}_r) \Rightarrow \dot{y}_s = \frac{\dot{F}_y}{K_y} + \dot{y}_r \quad (1.30)$$

et en substituant l'équation (1.27) dans l'équation (1.29) :

$$F_y = -D_y \cdot \frac{\dot{y}_s}{v_X} \quad (1.31)$$

En utilisant les équations (1.30) et (1.31) , on peut finalement écrire :

$$F_y + \dot{F}_y \cdot \frac{D_y}{K_y \cdot v_X} = -D_y \cdot \frac{\dot{y}_r}{v_X} \quad (1.32)$$

Comme la dérive apparente (α_{app}), c'est-à-dire la dérive mesurable au centre roue (K), est égale à $\frac{\dot{y}_r}{v_X}$, la fonction de transfert associée au modèle de Ballant est donc la suivante :

$$F_y = - \frac{D_y}{1 + \frac{D_y}{K_y \cdot v_X} \cdot s} \cdot \alpha_{app} \quad (1.33)$$

Le quotient de la rigidité de dérive avec la raideur latérale (D_y/K_y) se nomme le rayon de Ballant. On le note $R_{Ballant}$. En utilisant cette notation, la fonction de transfert présentée ci-dessus devient :

$$F_y = - \frac{D_y}{1 + \frac{R_{Ballant}}{v_X} \cdot s} \cdot \alpha_{app} \quad (1.34)$$

Ce modèle de Ballant est très souvent utilisé dans l'entreprise Renault pour modéliser le comportement transitoire du pneumatique.

1.4.3 Modèle Tametire

Le modèle Tametire est un modèle thermomécanique développé par la société Michelin, basé sur une approche physique [MIC, 2008] [Fevrier et Fandard, 2007]. Il est composé de trois « sous-modèles » : un modèle mécanique, un modèle qui décrit le comportement de la gomme, et un modèle thermique du pneumatique. Les entrées-sorties de ce modèle sont décrites dans la FIGURE 1.20.

Les efforts sont calculés dans ce modèle via une approche dite « poil de brosse » [Kiébré, 2010].

En 2009, ce modèle a connu des évolutions [Durand-Gasselin et Dailliez, 2009] : une d'entre elles permet de modéliser le comportement latéral transitoire du pneumatique.

En effet, l'effort latéral prenant en compte le comportement transitoire mécanique du pneumatique est estimé de la manière suivante :

$$F_y(t) = F_y(\tilde{\alpha}_t) \quad (1.35)$$

avec l'angle de dérive :

$$\tilde{\alpha}_t = (\tilde{\alpha}_{t-\Delta t} - \alpha_{t-\Delta t})e^{-\frac{t}{\tau}} + \alpha_{t-\Delta t} \quad (1.36)$$

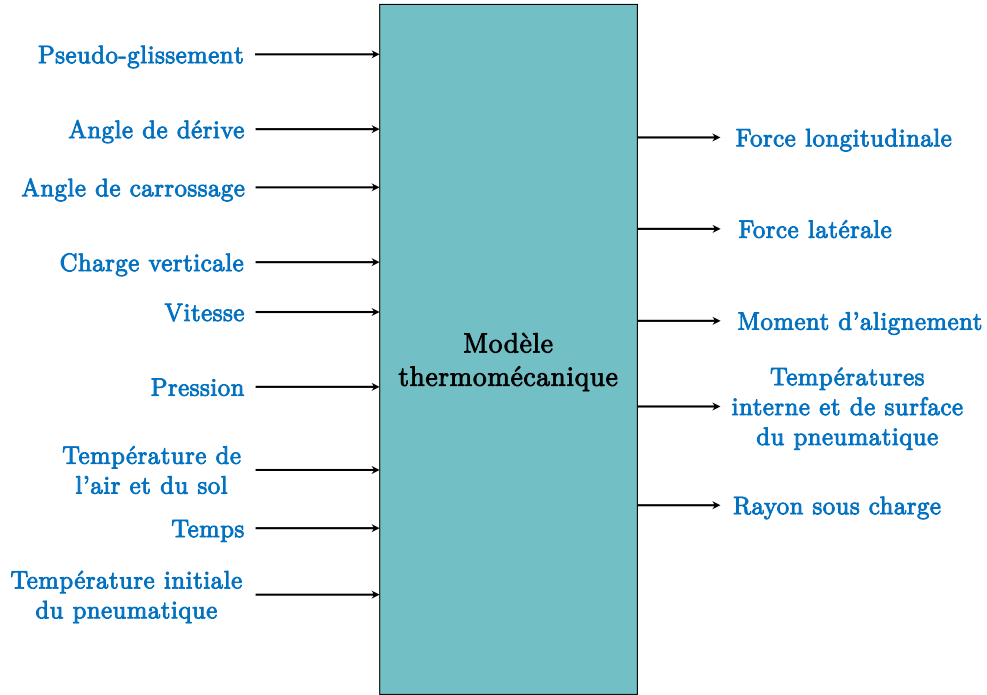


FIGURE 1.20 – Les paramètres d'entrée/sortie du modèle Tametire

et τ défini comme suit :

$$\tau = \frac{D}{K_y \cdot V} \quad (1.37)$$

avec K_y , la raideur latérale du pneumatique et V la vitesse du véhicule.

D représente alors la dérivée locale de l'effort latéral :

$$D = \frac{F_y(\alpha) - F_y(\alpha + \Delta\alpha)}{\Delta\alpha} \quad (1.38)$$

Pour terminer, ce modèle permet également le calcul de la longueur de relaxation latérale qui dépend du paramètre D :

$$\sigma_Y = \frac{D}{K_y} \quad (1.39)$$

Ce modèle a été implémenté dans le logiciel IPG CarMaker[®] et testé par la société Porsche. Ce type de modèle est très gourmand en CPU et n'est intéressant que pour des pneumatiques dont les propriétés varient fortement avec la température.

1.4.4 Modèles développés par le laboratoire AVDL

1.4.4.1 Modèle transitoire semi-empirique bidimensionnel

Le laboratoire AVDL (« *Advanced Vehicle Dynamics Laboratory* ») qui fait partie de l'institut polytechnique et de l'Université d'État de Virginie, a développé deux modèles transitoires de

pneumatiques : un modèle bidimensionnel et un modèle tridimensionnel [Umsrithong et Sandu, 2009].

Le modèle semi-empirique bidimensionnel prend en compte le régime quasi-statique et transitoire du pneumatique [Umsrithong et Sandu, 2009]. Ce modèle repose, en fait, sur des observations, des données expérimentales, ainsi que sur le modèle quasi-statique semi-empirique de pneumatique développé par Chan [Chan, 2008].

Les entrées/sorties de ce modèle transitoire sont présentées FIGURE 1.21.

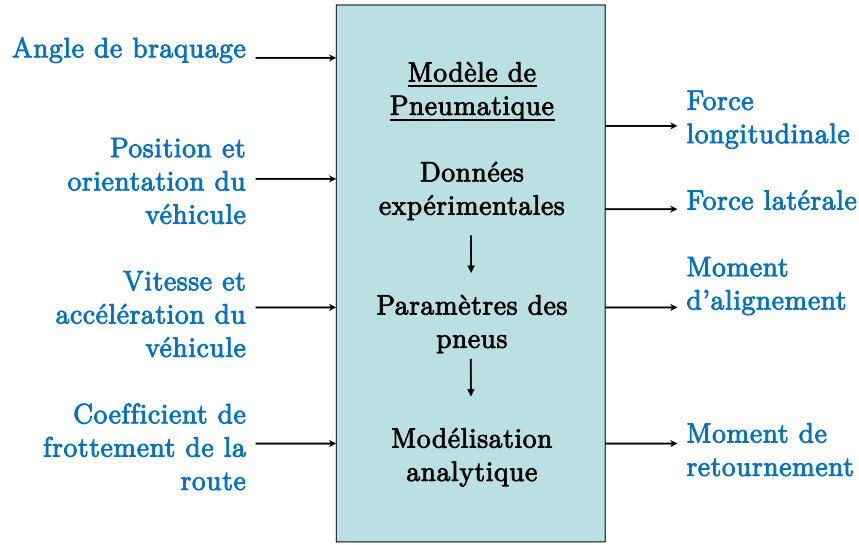


FIGURE 1.21 – Entrées/sorties du modèle bidimensionnel développée par A. Umsrithong et C. Sandu

Ce modèle repose sur plusieurs hypothèses importantes qu'il est important de rappeler ci-après :

1. L'aire de contact roue/sol a une forme rectangulaire ;
2. La distribution de pression du contact est uniforme dans la direction latérale ;
3. Le coefficient de frottement entre le pneumatique et la route dépend de la force verticale, du pseudo-glissement et de la dérive ;
4. Une équation du second ordre est utilisée afin de modéliser la relation entre la dérive au centre de roue et la dérive au niveau de l'aire de contact. Elle est définie par :

$$a_2 \ddot{\alpha}_c + a_1 \dot{\alpha}_c + \alpha_c = \alpha \quad (1.40)$$

avec a_1 et a_2 des constantes empiriques, α_c la dérive au niveau de l'aire de contact et α la dérive au centre roue.

Un segment de ceinture est utilisé afin de modéliser la structure du pneumatique (cf. FIGURE 1.22). Celui-ci est relié à la bande de roulement par des ressorts et amortisseurs. La paroi

latérale est également modélisée par des systèmes ressorts-amortisseurs.

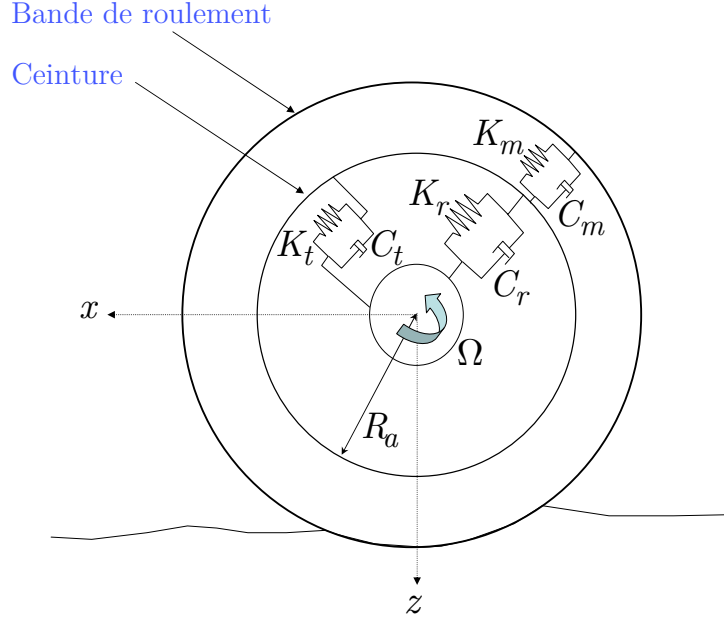


FIGURE 1.22 – Vue de face du modèle semi-empirique bidimensionnel

Afin de calculer les forces longitudinale et latérale au niveau de l'aire de contact, deux régions sont distinguées : la région d'adhésion et la région du glissement. Ces calculs font intervenir les paramètres suivants :

- S_x : Le pseudo-glissement ;
- K_b : La raideur combinée de la bande de glissement et de la paroi latérale ;
- l_p : La longueur de l'aire de contact ;
- D_x : La rigidité de pseudo-glissement du pneumatique ;
- D_y : La rigidité de dérive du pneumatique ;
- μ_{sx}, μ_{sy} : Les coefficients de frottement par glissement longitudinal et latéral ;
- μ_{px}, μ_{py} : Les pics des coefficients de frottement longitudinal et latéral ;
- b : la largeur du segment de ceinture ;
- R_a : le rayon du segment de ceinture ;
- k_x, k_y : les raideurs longitudinale et latérale de la bande de roulement (par unité de longueur).

Les raideurs longitudinale et latérale sont obtenues de la manière suivante :

$$k_x = \frac{2.D_x}{bl_p^2} \quad (1.41)$$

et

$$k_y = \frac{2.D_y}{bl_p^2} \quad (1.42)$$

Dans la région d'adhésion, les forces longitudinale et latérale (par unité de longueur de la circonférence), σ_x et σ_y , sont définies dans ce modèle de la manière suivante [Umsrithong et Sandu, 2009] :

$$\sigma_x = k_x \frac{s}{1-s} x \quad (1.43)$$

$$\sigma_y = k_y \frac{\tan \alpha_c}{1-s} x - \frac{F_y x}{K_b \cdot l_p} \left(1 - \frac{x}{l_p}\right) \quad (1.44)$$

Dans la région du glissement, ces forces sont estimées dans ce modèle de la manière suivante [Umsrithong et Sandu, 2009] :

$$F_{xsliding} = \mu_{sx} b R_a \int_{\frac{l_a}{R_a} - \theta_2}^{\theta_1} P_z(\theta) d\theta \quad (1.45)$$

$$F_{ysliding} = \mu_{sy} b R_a \int_{\frac{l_a}{R_a} - \theta_2}^{\theta_1} P_z(\theta) d\theta \quad (1.46)$$

avec θ la coordonnée angulaire prise dans le sens trigonométrique, $P_z(\theta)$ une distribution normale de pression par unité de largeur.

Afin de calculer **la longueur de la région d'adhésion** l_a , une frontière de type elliptique est utilisée :

$$l_a \sqrt{\left(\frac{k_x \frac{s}{1-s}}{\mu_{px}}\right)^2 + \left(\frac{k_y \frac{\tan \alpha}{1-s} - \frac{F_y}{K_b l_p} \left(1 - \frac{l_a}{l_p}\right)}{\mu_{py}}\right)^2} = P_z\left(\frac{l_a}{R_a} - \theta_2\right) \quad (1.47)$$

Les forces longitudinale et latérale sont donc obtenues par le biais d'une combinaison de celles estimées dans les deux régions. Par ailleurs, cette combinaison prend également en compte la poussée de carrossage. Elles sont calculées par les équations suivantes :

$$F_x = -b \int_0^{l_a} \sigma_x dx - \frac{\mu_{sx}^2 s}{\sqrt{(\mu_{sy} \tan \alpha_c)^2 + (\mu_{sx} s)^2}} b R_a \int_{\frac{l_a}{R_a} - \theta_2}^{\theta_1} P_z(\theta) d\theta \quad (1.48)$$

$$F_y = -b \int_0^{l_a} \sigma_y dx - \frac{\mu_{sy}^2 \tan \alpha_c}{\sqrt{(\mu_{sy} \tan \alpha_c)^2 + (\mu_{sx} s)^2}} b R_a \int_{\frac{l_a}{R_a} - \theta_2}^{\theta_1} P_z(\theta) d\theta + C_\gamma \tan \gamma \quad (1.49)$$

Le calcul du **moment de retournement et du moment d'alignement** utilise des facteurs de forme empiriques et des lois théoriques de façon que :

$$M_x = -C_{mx\gamma} (C_\gamma + F_z) R_l \sin \gamma + C_{mx\alpha} F_y \quad (1.50)$$

et

$$M_z = \left(C_{mz1} + (C_{mz2} - C_{mz1}) \operatorname{sech} \left(C_{mz3} \frac{|\tan \alpha_c|}{1 - |\tan \alpha_c|} \right) \right) (F_y \cos \gamma + C_\gamma \tan \gamma) \quad (1.51)$$

où : $C_{mx\gamma}$, $C_{mx\alpha}$, C_{mz1} , C_{mz2} , C_{mz3} sont des facteurs de forme empiriques.

Étant donné la présence de coefficients empiriques dont la procédure d'identification n'est pas fournie, nous n'avons pas testé ce modèle.

1.4.4.2 Modèle transitoire semi-empirique tridimensionnel

Le laboratoire AVDL a également développé un modèle tridimensionnel transitoire de pneumatiques [Umsrithong et Sandu, 2010], basé sur le modèle bidimensionnel exposé précédemment, ainsi que, comme le modèle bidimensionnel, sur le modèle quasi-statique de Chan.

Les entrées de ce modèle sont les suivantes : l'angle de dérive, le pseudo-glissement, l'angle de carrossage, la vitesse, la charge verticale, le coefficient de frottement de la route.

Les hypothèses faites dans le modèle bidimensionnel sur le coefficient de frottement de la route ainsi que sur l'angle de dérive sont conservées. Celle faite sur la forme de l'aire de contact est modifiée : en effet, il considère que l'aire de contact en présence de carrossage a une forme trapézoïdale et une forme rectangulaire lorsque cet angle est nul. Deux hypothèses sont également ajoutées. Une équation du premier ordre est utilisée afin de modéliser la relation entre le pseudo-glissement (S_x) et le pseudo-glissement effectif (S_c) pour des entrées basses fréquences :

$$a_s \cdot \dot{S}_c + S_c = S_x \quad (1.52)$$

avec a_s une constante empirique, S_c le pseudo-glissement effectif. De plus, le segment de ceinture est considéré comme flexible mais non extensible, il respecte donc la condition :

$$\omega = \frac{dv}{d\theta} \quad (1.53)$$

avec ω le déplacement dans la direction tangentielle, et v le déplacement dans la direction normale vers l'intérieur.

La structure du pneumatique est, elle, modélisée de la même manière que dans le modèle bidimensionnel. Le retard observé en régime transitoire, dû aux propriétés viscoélastiques du pneumatique, est modélisé par une équation du second ordre.

Les équations des **forces longitudinale et latérale** dans la région d'adhésion sont inchangées. En ce qui concerne la région du glissement, l'intégration ne se fait plus sur θ mais sur x et y :

$$F_{xsliding} = \mu_{sx} b R_a \int_{-b/2}^{b/2} \int_{l_a - \bar{x}}^{\bar{x}} P_z(x, y) dx dy \quad (1.54)$$

et

$$F_{ysliding} = \mu_{sy} b R_a \int_{-b/2}^{b/2} \int_{l_a - \bar{x}}^{\bar{x}} P_z(x, y) dx dy \quad (1.55)$$

Le calcul de l_a devient :

$$l_a \sqrt{\left(\frac{k_x \frac{s}{1-s}}{\mu_{px}}\right)^2 + \left(\frac{k_y \frac{\tan \alpha}{1-s} - \frac{F_y}{K_b l_p} \left(1 - \frac{l_a}{l_p}\right)}{\mu_{py}}\right)^2} = \int_{-b/2}^{b/2} P_z(x, y) dy \big|_{x=l_a} \quad (1.56)$$

et celui de **la force longitudinale et de la force latérale** :

$$F_x = -b \int_0^{l_a} \sigma_x dx - \frac{\mu_{sx}^2 s}{\sqrt{(\mu_{sy} \tan \alpha_c)^2 + (\mu_{sx} s)^2}} b R_a \int_{-b/2}^{b/2} \int_{l_a - \bar{x}}^{\bar{x}} P_z(x, y) dx dy \quad (1.57)$$

$$F_y = -b \int_0^{l_a} \sigma_y dx - \frac{\mu_{sy}^2 \tan \alpha_c}{\sqrt{(\mu_{sy} \tan \alpha_c)^2 + (\mu_{sx} s)^2}} b R_a \int_{-b/2}^{b/2} \int_{l_a - \bar{x}}^{\bar{x}} P_z(x, y) dx dy + C_\gamma \tan \gamma \quad (1.58)$$

Enfin les calculs du **moment d'alignement et de retournement** restent inchangés.

Ce modèle s'avère être très complexe et comme pour le modèle bidimensionnel, ne disposant pas de la procédure d'identification des paramètres, nous n'avons pas testé ce modèle.

1.4.5 Modèle développé par la société General Motors

Conscients de l'importance de connaître le comportement transitoire des véhicules, Wu X., Farhad M. et Wong J. (société General Motors) ont réalisé une étude visant à comprendre comment évaluer et concevoir le châssis en fonction du comportement transitoire désiré [Wu *et al.*, 2011]. Il se sont intéressés à la modélisation de la longueur de relaxation effective.

Dans ce modèle, en appliquant un échelon unitaire de dérive en entrée, **la force latérale** F_y est estimée de la manière suivante :

$$F_y = D_y \cdot \alpha (1 - e^{-t/\tau}) \quad (1.59)$$

où D_y désigne la rigidité de dérive du pneumatique, α l'angle de dérive initial et τ la constante de temps.

La longueur de relaxation L_α est égale à la distance parcourue par le pneumatique pour atteindre $1 - e^{-1}$ soit environ 63,2% de la force quasi-statique. Cette longueur L_α s'exprime alors :

$$L_\alpha = v_X \cdot \tau = D_y / K_y \quad (1.60)$$

d'où :

$$F_y = D_y \cdot \alpha \cdot (1 - e^{-\frac{K_y \cdot v_X}{D_y} t}) \cong K_y \cdot \alpha \cdot v_X \cdot t \cdot (1 - \frac{1}{2} \frac{K_y v_X}{D_y} t + \dots) \quad (1.61)$$

avec K_y la raideur latérale et v_X la vitesse longitudinale.

1.4.6 FTire

La société « *Cosin Scientific Software* », fondée en 2009, a donné naissance au modèle de pneumatique nommé FTire (Flexible Structure Tire Model). Ce modèle couvre un grand nombre de domaines d'application comme le montre la FIGURE 1.23.

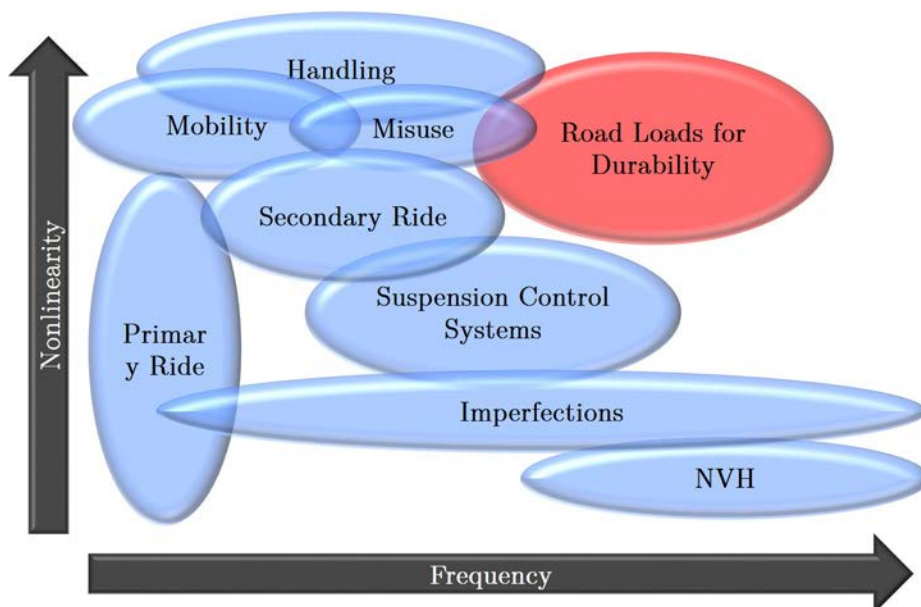


FIGURE 1.23 – Domaines d'application du modèle FTire [COS, 2013]

Ce modèle se compose de deux principales parties :

- La première partie comporte la description de la structure du pneumatique. Les tringles, la carcasse et la ceinture du pneumatique sont modélisés par 90 à 360 éléments connectés entre eux et à la jante par le biais de ressorts et d'amortisseurs.
- La seconde partie modélise la bande de roulement et son comportement. 1000 à 10000 éléments en contact avec le sol sont connectés aux éléments constituant la ceinture.

Chaque segment de la ceinture dispose de $4 + x$ degrés de libertés. 3 degrés de libertés sont associés au déplacement longitudinal, latéral et vertical du segment (cf. FIGURE 1.24). Un quatrième permet la rotation du segment autour de son axe concentrique (cf. FIGURE 1.25). Les « x » autres degrés de liberté permettent la courbure du segment, latéralement, selon « x » fonctions de forme (cf. FIGURE 1.26).

Ce modèle contient également un sous-modèle nommé HTire (Handling Tire Model), dédié à la modélisation du comportement transitoire du pneumatique. En effet, HTire intègre une approche décrivant le retard observé, en régime transitoire, de la réponse du pneumatique.

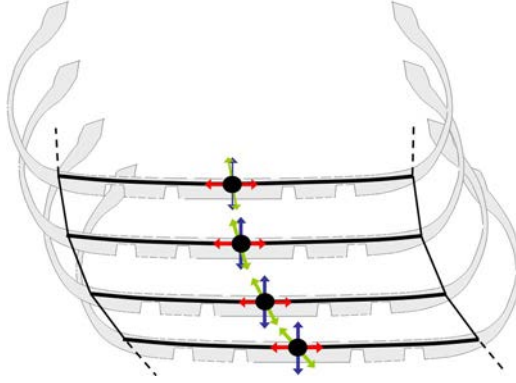


FIGURE 1.24 – Déplacements longitudinal, latéral et vertical des segments de ceinture [COS, 2013]

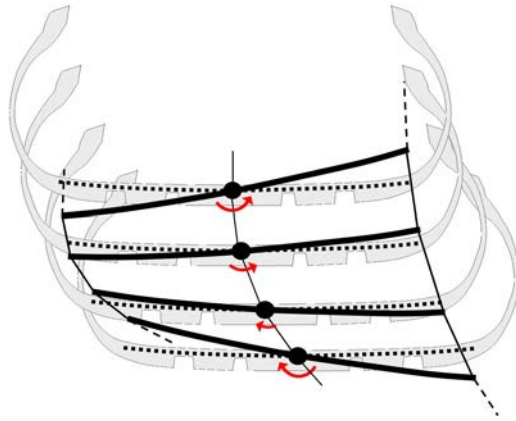


FIGURE 1.25 – Degré de liberté associé à la rotation des segments de ceinture autour sur de leur axe concentrique [COS, 2013]

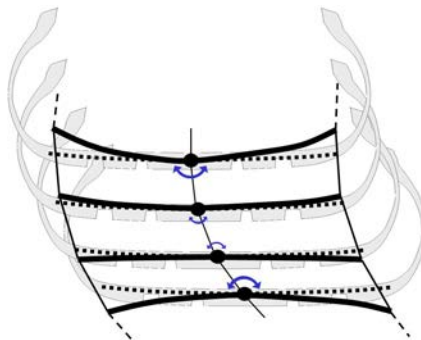


FIGURE 1.26 – « x » degrés de libertés associés à la courbure latérale des segments de ceinture [COS, 2013]

Ce retard est décrit par une équation non-linéaire du premier ordre, permettant le calcul de

la force longitudinale, latérale et du couple d'auto-alignement, tels que :

$$T = \min(T_{max}, \frac{l}{v}) \quad (1.62)$$

$$\dot{F} = \begin{cases} \frac{1}{T}(F_{stat} - F) & \text{if } F_{stat} - F > 0 \\ \frac{1}{rT}(F_{stat} - F) & \text{if } F_{stat} - F \leq 0 \end{cases} \quad (1.63)$$

où :

l désigne la longueur de relaxation (constante) ;

v désigne la vitesse de rotation de la roue ;

T_{max} désigne la limite supérieure de la constante de temps résultante ;

r désigne un facteur de réduction qui traduit la relation entre la constante de temps lors d'une augmentation des efforts et celle lors d'une diminution des efforts ;

F_{stat} désigne la valeur de la grandeur observée (force longitudinale, latérale et du couple d'auto-alignement) ;

F désigne la valeur transitoire résultante de la grandeur observée (force longitudinale, latérale et du couple d'auto-alignement).

Ce modèle est très coûteux en terme de mise en données et de licences. Afin de respecter l'exigence industrielle de simplicité de modélisation, nous n'avons pas utilisé ce modèle.

1.5 Conclusion

Ce chapitre a rappelé les éléments importants du pneumatique et ses diverses caractéristiques. Il a défini également les bases de sa modélisation et a dressé un état de l'art des modèles transitoires existants dans la littérature.

Les modèles de pneumatiques existants modélisent correctement le comportement quasi-statique de cet organe et certains de ces modèles comportent également un modèle « annexe » traduisant le comportement transitoire du pneumatique. Dans ces modèles « annexes », des fonctions du premier ou du second ordre retranscrivent le caractère transitoire des données observées.

Ces modèles ne sont pas directement exploitables car ils font appel à des paramètres semi-empiriques dont la procédure d'identification n'est pas fournie. Nous avons donc choisi de modéliser le comportement transitoire du pneumatique à travers un modèle simple (nouvelle version du modèle de Ballant *cf.* Chapitre 3) avec une procédure d'identification des paramètres basée sur les plans d'expériences afin de minimiser le nombre d'essais.

Le chapitre suivant présente ainsi la théorie des plans d'expériences, et plus particulièrement les plans factoriels complets et fractionnaires qui sont utilisés dans la phase d'identification du modèle.

2

Les plans d'expériences

Sommaire

2.1	Introduction	34
2.2	Démarche générale et définitions	34
2.2.1	Étape 1 : Analyser le phénomène ou le procédé à étudier	34
2.2.2	Étape 2 : Déterminer les facteurs influents	36
2.2.3	Étape 3 : Modéliser le phénomène ou le procédé étudié	38
2.2.4	Étape 4 : Optimiser le phénomène ou le procédé étudié	38
2.3	Méthode de criblage	38
2.3.1	Les plans factoriels complets à deux niveaux	38
2.3.2	Les plans factoriels fractionnaires à deux niveaux	42
2.3.3	Analyse statistique du modèle	47
2.3.4	Analyse graphique du modèle	50
2.4	Ajustement de modèle	54
2.4.1	Test d'ajustement du modèle	54
2.4.2	Coefficient de corrélation linéaire multiple	56
2.5	Plans pour surfaces de réponses	57
2.5.1	Présentation	58
2.5.2	Plans composites centrés	58
2.5.3	Analyse du modèle	62
2.6	Conclusion	63

2.1 Introduction

Dans le cadre de notre étude, afin de répondre à des contraintes industrielles de minimisation du nombre d'essais et de modélisation simple, nous nous sommes intéressés à la méthode des plans d'expériences.

L'objectif des plans d'expériences est souvent résumé de la façon suivante :

« Minimiser le coût d'obtention d'une information fiable c'est à dire effectuer le minimum d'essais et obtenir le maximum de précision sur les résultats visés. »
[Linder, 2005]

Il existe de multiples familles de plans d'expériences qui ne répondent pas aux mêmes objectifs. Les plans peuvent, alors, être classés selon cinq principales catégories [AFNOR, 2003] :

- identification de facteurs influents ;
- estimation de l'influence des facteurs ;
- détermination des configurations optimales ;
- minimisation de l'influence des facteurs bruit ;
- optimisation des propriétés d'un mélange.

Quelque soit la catégorie utilisée, la démarche générale des plans d'expériences suit le schéma décrit FIGURE 2.1 [Ferreboeuf, 1998]. Nous proposons de détailler ces différentes étapes dans la section suivante.

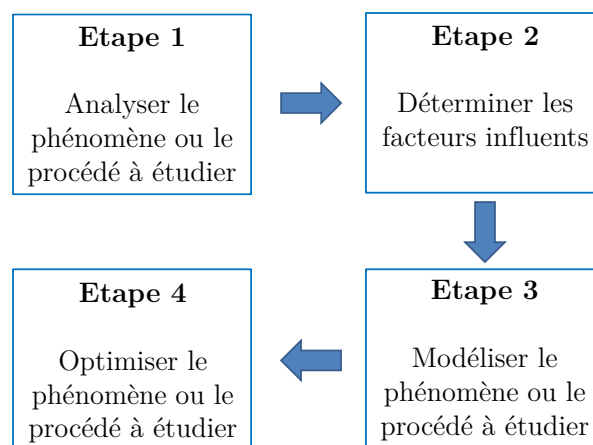


FIGURE 2.1 – Démarche générale des plans d'expériences [Ferreboeuf, 1998]

2.2 Démarche générale et définitions

2.2.1 Étape 1 : Analyser le phénomène ou le procédé à étudier

Pour commencer, il convient de définir l'objectif du plan d'expérience, à travers l'analyse du phénomène ou du procédé à étudier. Il faut ainsi préciser le problème et donc définir les facteurs qui seront étudiés ainsi que le domaine d'étude.

Les facteurs sont des variables qui seront modifiées et dont la variation sur la sortie sera étudiée. Il peut s'agir de facteurs dits qualitatifs, quantitatifs ou de type temporels. Le nombre de facteurs étudiés est conventionnellement noté k et le nombre de valeurs que peuvent prendre ces facteurs, c'est à dire leurs **niveaux** (ou **modalités**), $m_{nom \text{ du facteur}}$.

Les niveaux pris par les différents facteurs sont généralement normés pour définir des **variables centrées réduites**. Elles sont dites **centrées** car l'origine des mesures est déplacée autour de zéro.

Par ailleurs, le niveau bas de chaque facteur est noté -1 et le niveau haut +1 : il s'agit de la notation de Yates.

Le passage des valeurs d'une variable d'origine (on notera son domaine de variation $[V_{min}, V_{max}]$) à une variable centrée réduite s'effectue de la manière suivante :

$$V_{cr} = \frac{V - V_0}{Pas} \quad (2.1)$$

avec V_{cr} la valeur de la variable centrée réduite, V la valeur d'origine de la variable, V_0 la valeur moyenne de la variable d'origine et le Pas qui est égal à $[V_{max} - V_{min}]/2$.

Les valeurs prises par le facteur entre ces deux niveaux constituent le **domaine de variation** du facteur. Une expérience est ainsi définie par les données d'un vecteur de dimension \mathbb{R}^k contenant les niveaux des différents facteurs. L'ensemble des domaines de variation des différents facteurs constitue le **domaine d'étude ou domaine expérimental**. On note ce domaine $\epsilon = [V_{1min}, V_{1max}] * [V_{2min}, V_{2max}] * \dots * [V_{kmin}, V_{kmax}]$ (voir FIGURE 2.2 dans le cas de deux facteurs).

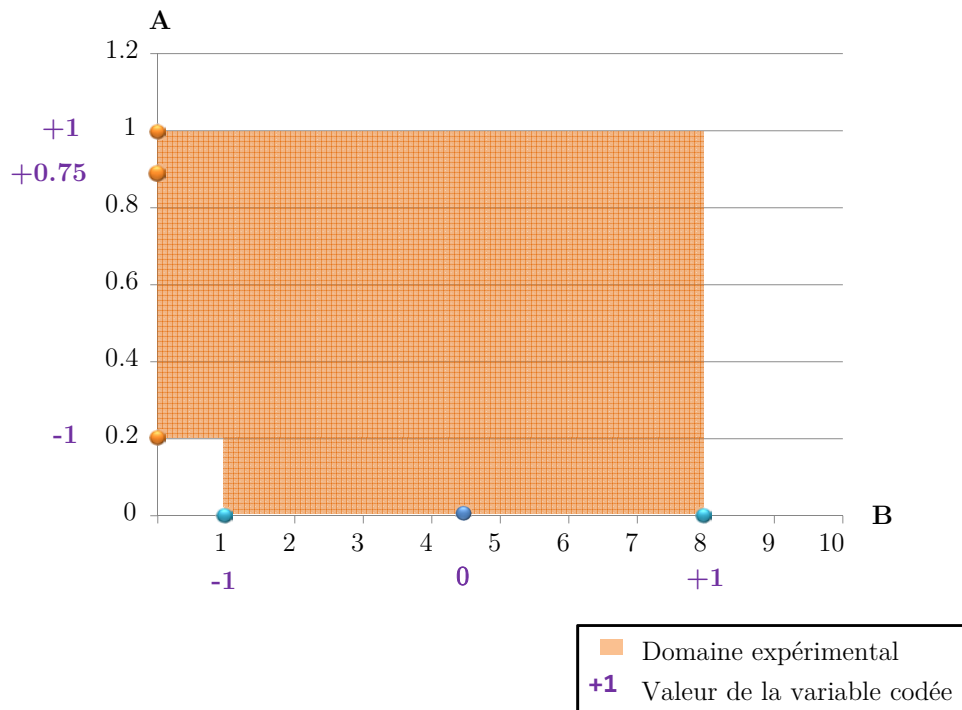


FIGURE 2.2 – Exemple de représentation des variables centrées réduites et du domaine expérimental

Lorsque les facteurs à étudier sont bien définis, il convient également de spécifier les éventuels facteurs de bruits ainsi que les effets blocs (écarts systématiques liés à une machine d'essais, à un lieu d'essais...), afin que le problème technique soit précisément posé.

2.2.2 Étape 2 : Déterminer les facteurs influents

Cette étape permet de déterminer les facteurs susceptibles d'avoir une influence sur le phénomène étudié : une analyse de sensibilité est ainsi effectuée.

Les méthodes d'analyse de sensibilité sont d'une grande utilité lors de la construction et de l'utilisation d'un modèle numérique de simulation. En effet, elles ont pour but de quantifier l'impact de chaque facteur sur la (les) sortie(s) étudiée(s). Elles sont, par exemple, d'un grand intérêt lorsque l'on souhaite réduire la variabilité de la sortie en fixant le moins de facteurs possibles, ou lorsque l'on souhaite calibrer les facteurs les moins influents...

Il convient de dissocier l'analyse de sensibilité et l'analyse d'incertitude qui étudie comment l'incertitude sur les paramètres estimés se propage sur la sortie du modèle. Par exemple, dans le cas de la simulation numérique, plusieurs sources d'incertitudes peuvent exister : des incertitudes sur les données (« *data* »), sur les paramètres du modèle (« *parameters* »), sur les solveurs et leurs paramètres (« *resolution levels* ») et sur la caractérisation du modèle (« *model structures* »).

La FIGURE 2.3 propose une synthèse de la démarche d'analyse de sensibilité et d'incertitude effectuée par Saltelli [Saltelli, 2006].

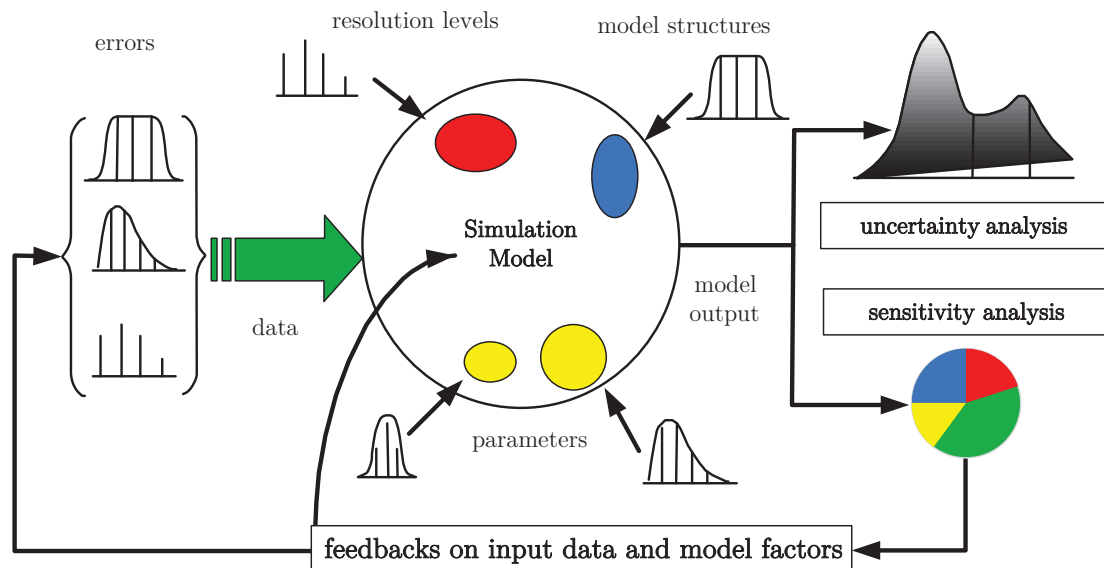


FIGURE 2.3 – Synthèse de la démarche d'analyse de sensibilité et d'incertitude selon [Saltelli, 2006]

Les méthodes d'analyse de sensibilité sont souvent classées en trois groupes [Saltelli *et al.*, 2004, Saltelli *et al.*, 2008] :

- **les méthodes locales.** L'analyse de sensibilité locale étudie comment de petites perturbations autour d'une valeur d'un paramètre d'entrée - en fixant les autres paramètres d'entrée à leur valeur nominale - se répercutent sur la valeur de la sortie. Cette méthode peut être perçue comme un cas particulier de l'approche « *One-Factor-At-A-Time* » (OAT) (un seul facteur varie à la fois), car quand un facteur varie, tous les autres sont maintenus constants.

Généralement, lorsque l'on applique cette méthode, les relations entre les entrées et les sorties sont supposées être linéaires et par conséquent, la mesure de la sensibilité S_i pour un facteur i donné peut être calculée par la relation suivante :

$$S_i = \frac{\ln y - \ln y_b}{\ln x_i - \ln x_{ib}} \quad (2.2)$$

avec

x_{ib} la valeur de base prise par le facteur i ;

x_i la valeur de base prise par le facteur i augmentée ou diminuée d'un certain pourcentage de variation ;

y_b la sortie correspondant à x_{ib} ;

y la sortie correspondant à x_i .

- **les méthodes de criblage (ou méthodes de screening).** Ces méthodes qualitatives permettent de classer les paramètres d'entrée en fonction de leur influence sur la sortie du modèle [Faivre *et al.*, 2013] . Elles sont basées sur la discrétisation des entrées en plusieurs valeurs nommées niveaux et n'utilisent pas de lois de probabilité sur les entrées. Ces méthodes sont très efficaces quand le modèle à analyser comporte un nombre important de paramètres d'entrée.

L'approche « *One-Factor-At-A-Time* » , les plans d'expériences factoriels et les plans d'expériences factoriels fractionnaires (*cf.* section 2.3) utilisent la méthode de criblage.

- **les méthodes globales** . Elles consistent à déterminer la part de variabilité de la réponse du modèle due à un sous-ensemble de variables d'entrée. Elles permettent de hiérarchiser la contribution des variables d'entrée (et de leurs interactions) à la variabilité de la réponse du modèle.

Trois techniques principales sont largement utilisées : Monte Carlo (MC), « *Response Surface Methodology* » (RSM) et « *Fourrier Amplitude Sensivity Test* » (FAST). Ces techniques s'affranchissent des hypothèses classiques de linéarité que supposent les principes de régression et de corrélation.

S. Hamza, F. Anstett-Collin, R. Kiebre et M. Basset proposent par ailleurs dans l'article [Hamza *et al.*, 2012] une description détaillée des différentes méthodes d'analyse de sensibilité.

Dans le cadre de notre étude, nous avons choisi de réaliser cette étape d'analyse de sensibilité en utilisant deux méthodes de criblage : les plans factoriels complets et les plans factoriels fractionnaires, car ce sont des méthodes très efficaces lorsque le nombre de paramètres d'entrée

est important et ces méthodes s'appliquent facilement à des campagnes d'essais industriels.

2.2.3 Étape 3 : Modéliser le phénomène ou le procédé étudié

Cette étape permet d'écrire une fonction mathématique reliant le phénomène observé aux facteurs influents soit :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.3)$$

avec y la valeur représentative du phénomène et x_1, \dots, x_n les facteurs influents.

Un type de modèle doit être choisi. On peut distinguer trois types de modèles :

- les modèles multilinéaires (relations linéaires entre les facteurs) ;
- les modèles qui reposent sur les lois physiques qui régissent le système ;
- les modèles qui sont un mélange de ces deux derniers.

Le type de modélisation est une caractéristique primordiale dans le choix du plan d'expériences. Afin de répondre à une exigence de « simplicité » des modèles, les modèles postulés dans notre étude sont des modèles multilinéaires.

2.2.4 Étape 4 : Optimiser le phénomène ou le procédé étudié

Cette étape consiste à déterminer les valeurs des facteurs influents permettant d'atteindre l'optimum recherché au niveau de la sortie. Pour cela, des plans pour surfaces de réponses sont utilisés. Cette étape ne sera pas abordée dans ces travaux car ils ont pour but de modéliser la sortie et non pas d'atteindre un optimum au niveau de la sortie .

Dans la section suivante, nous allons présenter les deux plans de criblage (plans factoriels complet et fractionnaire), utilisés lors des étapes de « détermination des facteurs influents » (*cf.* étape 2 section 2.2.2) et « de modélisation du phénomène » (*cf.* étape 3 section 2.2.3), de notre étude du comportement transitoire du pneumatique (*cf.* FIGURE 2.4).

Nous montrerons que, dans certains cas, le modèle obtenu (lors de l'étape 3 *cf.* section 2.2.3) par le biais de ces deux types de plans peut s'avérer « insuffisant » (*cf.* section 2.4).

Ainsi dans un second temps, un troisième type de plan (*cf.* section 2.5) sera présenté afin de répondre aux lacunes liées à la modélisation.

Un schéma de synthèse sera présenté au début de chacune des sections qui vont suivre afin de rappeler l'étape étudiée.

2.3 Méthode de criblage

2.3.1 Les plans factoriels complets à deux niveaux

2.3.1.1 Présentation

Un plan factoriel complet consiste à étudier toutes les combinaisons possibles des facteurs d'entrée. Ces plans sont notés 2^k avec k le nombre de facteurs et 2 pour indiquer les deux niveaux.

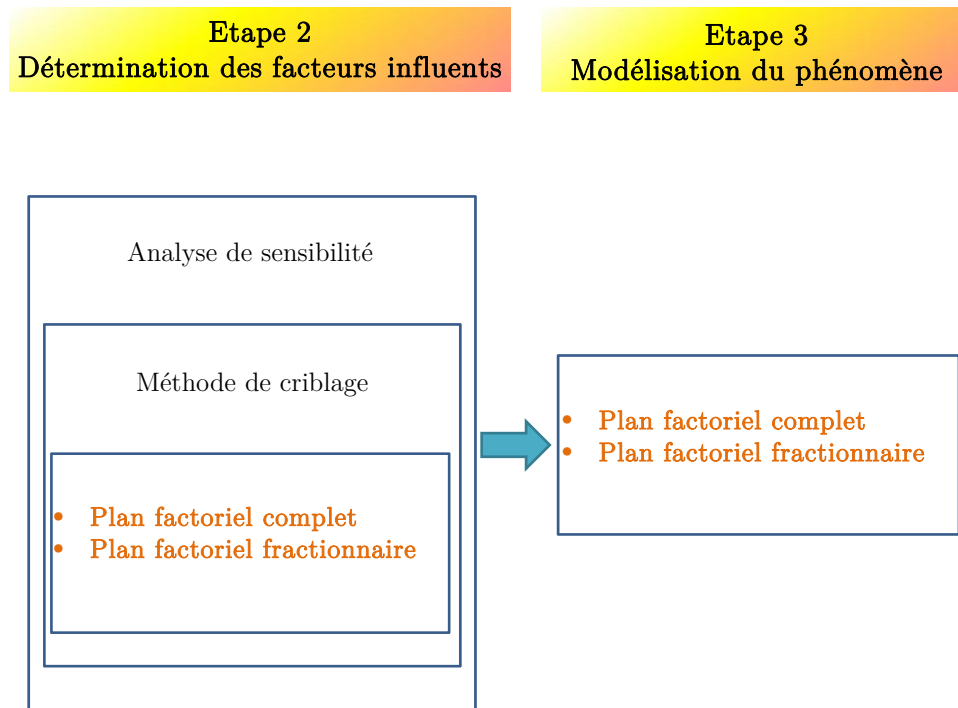


FIGURE 2.4 – Schéma de suivi de la démarche employée : étapes 2 et 3

Par exemple, si l'étude comprend 3 facteurs à deux niveaux, le plan sera noté 2^3 et se composera de $2^3 = 8$ expériences. De manière plus générale, un plan 2^k comprendra 2^k essais. Ce type de plan peut devenir très coûteux en essais car le nombre d'essais augmente très rapidement avec l'augmentation du nombre de variables.

Les essais définis par le plan d'expérience sont synthétisés sous forme d'une matrice d'expérience. Par exemple, la TABLE 2.1 est la représentation du plan 2^2 . Les deux facteurs de ce plan sont nommés 1 et 2.

Chaque ligne de ce tableau correspond à un essai et chaque colonne à un facteur. La notation de Yates est utilisée pour définir la valeur des facteurs : la première expérience est réalisée en fixant tous les facteurs à leur niveau bas et la première colonne est obtenue en changeant les signes d'une ligne à une autre. Pour le $k^{\text{ième}}$ facteur présent dans la $k^{\text{ième}}$ colonne, les signes changent tous les 2^{k-1} lignes. Dans ce tableau, les interactions entre facteurs sont également représentées. Les plans factoriels sont dits saturés car il y a égalité entre le nombre d'expériences et le nombre de facteurs étudiés (nombre de colonnes de la matrice d'expérience). Reprenons l'exemple du plan 2^2 défini TABLE 2.1. La totalité des combinaisons entre facteurs a bien été représentée. En ce qui concerne le remplissage de la colonne des interactions, elle est basée sur la simple règle des signes ('-' * '-' = '+' ; '-' * '+' = '-').

N° essai	Moyenne	Facteur 1	Facteur 2	Interaction 12	Sortie Y
1	+	-	-	+	y_1
2	+	+	-	-	y_2
3	+	-	+	-	y_3
4	+	+	+	+	y_4

TABLE 2.1 – Plan d'expérience et réponses observées

2.3.1.2 Modélisation

Dans le cas des plans factoriels, le modèle postulé *a priori* est un modèle polynomial qui relie la réponse y aux différents facteurs [Goupy et Creighton, 2006] :

$$y = a_0 + a_1.x_1 + a_2.x_2 + \dots + a_n.x_n + \sum_{i,j=1;i \neq j}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i,j,k=1;i \neq j \neq k}^n a_{ijk}x_i x_j x_k + \dots \quad (2.4)$$

avec x_i un niveau du facteur i , x_j un niveau du facteur j et $a_0, a_1 \dots a_n$ les coefficients du modèle. Ainsi, le modèle postulé correspondant au plan 2^2 donné dans la TABLE 2.1 est le suivant :

$$y = a_0 + a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_{12}.x_1.x_2 \quad (2.5)$$

Et en utilisant la TABLE 2.1, nous pouvons déterminer la valeur des coefficients du modèle en résolvant le système :

$$\begin{cases} y_1 = a_0 - a_1 - a_2 + a_{12} \\ y_2 = a_0 + a_1 - a_2 - a_{12} \\ y_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_{12} \\ y_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_{12} \end{cases}$$

qui peut s'écrire sous la forme générique suivante :

$$Y = X.E \quad (2.6)$$

avec

Y le vecteur réponse ;

X la matrice du modèle ;

E le vecteur des coefficients du modèle à déterminer.

Dans le cas de notre exemple, nous avons :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

La matrice résultant de la multiplication de la transposée de la matrice X avec elle-même - $X^T.X$ - se nomme **matrice d'information ou également matrice de Fisher**. L'inverse de la matrice d'information - $\Delta = (X^T.X)^{-1}$ - est **la matrice de dispersion**.

Pour tout plan factoriel qu'il soit complet, fractionnaire ou pour la partie factorielle des plans composites (*cf.* sections suivantes), lorsque tous les effets sont pris en compte dans le modèle, la matrice X est **une matrice d'Hadamard**.

Une matrice d'Hadamard est une matrice H carrée ($N_H * N_H$) orthogonale dont les éléments sont tous égaux à $+1$ ou -1 , telle que :

$$H^T.H = N_H.I_{N_H} \quad (2.8)$$

avec I_{N_H} la matrice unité d'ordre N_H .

La condition d'existence de cette matrice est $N_H = 2$ ou $N_H = 0 \bmod 4$. Cette matrice permet d'atteindre en N_H expériences la variance minimale sur les coefficients.

En utilisant l'équation (2.8), nous pouvons donc écrire :

$$X^T.X = n.I_n \quad (2.9)$$

avec n le nombre d'expériences.

Les coefficients du modèle sont aussi appelés **effets des facteurs** (ou des interactions entre facteurs) car comme nous le montrerons dans la section suivante, ils traduisent une différence entre la moyenne des réponses au niveau haut du facteur (ou de l'interaction entre facteurs) et celle des réponses au niveau bas de celui-ci.

2.3.1.3 Calcul des effets

Les effets associés au plan 2^2 défini TABLE 2.1 sont :

L'effet moyen du facteur 1 est défini par :

$$E_1 = a_1 = \frac{\overline{y_{1+}} - \overline{y_{1-}}}{2} \quad (2.10)$$

avec la réponse moyenne lorsque le facteur 1 est au niveau bas qui est égal à :

$$\overline{y_{1-}} = \frac{y_1 + y_3}{2} \quad (2.11)$$

et lorsque le facteur 1 est au niveau haut :

$$\overline{y_{1+}} = \frac{y_2 + y_4}{2} \quad (2.12)$$

De la même manière, pour le facteur 2 :

$$E_2 = a_2 = \frac{\overline{y_{2+}} - \overline{y_{2-}}}{2} = \frac{y_3 + y_4 - y_1 - y_2}{4} \quad (2.13)$$

et pour l'interaction entre le facteur 1 et le facteur 2 :

$$E_{12} = a_{12} = \frac{\overline{y_{12+}} - \overline{y_{12-}}}{2} = \frac{y_1 + y_4 - y_2 - y_3}{4} \quad (2.14)$$

Plus généralement, calculer les effets des facteurs et interactions entre facteurs équivaut à résoudre (cf. équation(2.6)) :

$$X.E = Y \quad (2.15)$$

Ainsi, en utilisant l'équation (2.9),

$$E = \frac{1}{n}.X^T.Y \quad (2.16)$$

Les plans factoriels complets ont donc l'avantage [Goupy, 1990] d'être facile à construire et à contrôler étant donné que les facteurs ne prennent que deux niveaux. Par ailleurs, ces plans sont basés sur des matrices d'Hadamard qui permettent d'atteindre en N_H expériences la variance minimale sur les coefficients. La procédure expérimentale est donc optimale. La modélisation par le biais de ces plans est, de plus, très simple ainsi que le calcul des coefficients (ou effets) des facteurs. La détermination des paramètres influents est précise grâce au calcul exact des effets.

Cependant, ces plans deviennent rapidement coûteux en essais. Il faut, par exemple, compter 64 essais lorsque l'étude comprend 6 facteurs. Les plans factoriels fractionnaires ont ainsi été créés afin de pallier cet inconvénient.

2.3.2 Les plans factoriels fractionnaires à deux niveaux

2.3.2.1 Présentation

Afin de réduire le nombre d'essais d'un plan complet qui augmente fortement lorsque le nombre de facteurs augmente, une fraction du plan complet va être choisie : on parle de plan factoriel fractionnaire. Le nombre d'essais va être divisé par une puissance de 2 et le plan fractionnaire sera nommé plan 2^{k-p} avec p le nombre de fois où le plan a été divisé par 2. Le plan fractionnaire obtenu comporte donc 2^{k-p} essais. Prenons l'exemple du plan 2^{3-1} : il s'agit d'un plan comportant la moitié des essais du plan complet 2^3 , soit 4 essais.

Notons $n = k - p$. Le principe de construction du plan 2^{k-p} consiste à faire correspondre les n premiers facteurs du plan initial (plan 2^k) aux n facteurs principaux du plan 2^n . Dans le plan 2^n , il reste donc $k - n$ colonnes qui sont des interactions. A chacune de ces interactions, on associe un des facteurs principaux du plan 2^k (ou la même colonne avec les signes opposés).

Construisons par exemple le plan 2^{3-1} . Faisons correspondre les 2 premiers facteurs du plan 2^3 aux deux facteurs principaux du plan 2^2 (cf. TABLES 2.1 et 2.2). Dans la matrice du plan 2^2 , il reste donc l'interaction entre le facteur 1 et le facteur 2 que l'on associe avec le dernier facteur principal du plan 2^3 . La matrice d'expérience du plan 2^{3-1} est ainsi représentée ci-dessous :

Le modèle associé au plan 2^3 s'écrit :

$$y = a_0 + a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 + a_{12}.x_1.x_2 + a_{13}.x_1.x_3 + a_{23}.x_2.x_3 + a_{123}.x_1.x_2.x_3 \quad (2.17)$$

N° essai	Moyenne	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3 = Interaction 12	Sortie Y
1	+	-	-	+	y_1
2	+	+	-	-	y_2
3	+	-	+	-	y_3
4	+	+	+	+	y_4

TABLE 2.2 – Matrice d’expérience du plan 2^{3-1}

Il comporte 8 inconnues alors que le plan dispose seulement de 4 essais. Le fait d’avoir associé certains facteurs entre eux va ainsi permettre de diminuer le nombre d’inconnues.

L’effet du facteur 3 (a_3) a été **confondu**/**aliasé** avec celui de l’interaction 12 (a_{12}). On peut donc écrire que :

$$l_3 = a_3 + a_{12} \quad (2.18)$$

avec l_3 le **contraste** associé au facteur 3.

Afin de calculer les autres contrastes et de déterminer comment les effets des facteurs et des interactions sont aliasés dans chaque contraste, il est nécessaire d’utiliser un générateur d’alias, décrit dans la section suivante.

2.3.2.2 Générateur d’alias

La détermination du générateur d’alias fait appel au **calcul de Box**, que nous allons expliciter ci-dessous [Box et Behnken, 1960].

Dans ce calcul, on désigne par 1 la colonne de signe dans la matrice d’essais correspondant au facteur 1 (de même pour les autres facteurs). Nous avons donc par exemple (cf. TABLE 2.2) :

$$1 = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Par ailleurs, on définit de la même manière :

$$I = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} \text{ et } -I = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

qui représentent les colonnes identité.

L'algèbre de Box est basée sur les relations suivantes :

- Propriété 1 : la multiplication des colonnes se fait terme à terme en utilisant la règle des signes. Par exemple :

$$1.2 = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$1.I = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix} = 1 \quad (2.22)$$

- Propriété 2 : la multiplication d'une colonne par elle-même donne une colonne identité. Par exemple :

$$1.1 = I \quad (2.23)$$

- Propriété 3 : la multiplication des colonnes est commutative. Par exemple :

$$1.2 = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix} = 2.1 = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Nous rappelons que le générateur d'alias permet de déterminer la manière dont les coefficients sont aliasés dans les contrastes. Pour écrire ce générateur, il faut utiliser une colonne où les coefficients sont aliasés. Par exemple TABLE 2.2, le facteur 3 est aliasé avec l'interaction 12 et s'écrit en utilisant les notations de Box : $3 = 12$.

Nous allons transformer cette expression afin d'obtenir d'un côté ou de l'autre de l'égalité la colonne identité I (ou -I). Pour cela nous utilisons la propriété 2 :

$$3.3 = I = 12.3 \quad (2.25)$$

soit

$$I = 123 \quad (2.26)$$

$I = 123$ est le **générateur d'alias**.

En choisissant d'obtenir d'un côté ou de l'autre de l'égalité la colonne -I, nous aurions également aliasé le facteur 3 avec l'inverse de l'interaction 12 (-12) : $3 = -12$.

Ainsi,

$$3.3 = I = -12.3 \quad (2.27)$$

et aurions obtenu le générateur d'alias : $I = -123$

Le générateur d'alias défini équation (2.26) (ainsi que celui défini équation (2.27)) permet ainsi de retrouver toutes les combinaisons de facteurs.

Nous avons $I = 123$, soit en utilisant la propriété 1,

$$1.I = 1 = 1.123 \quad (2.28)$$

soit (propriété 2 de l'algèbre de Box)

$$1 = 23 \quad (2.29)$$

Nous avons donc également $2 = 13$ et $3 = 12$. A partir de ces égalités, le calcul des contrastes est possible grâce à la relation d'équivalence.

Nous avons montré équation (2.18) qu'un contraste est la somme algébrique des coefficients qui ont les mêmes colonnes de signes. **La relation d'équivalence** stipule alors que si $3 = 12$:

$$l_3 = l_{12} = a_3 + a_{12} \quad (2.30)$$

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$l_1 = l_{23} = a_1 + a_{23} ; l_2 = l_{13} = a_2 + a_{13} ; l_3 = l_{12} = a_3 + a_{12} ; l_0 = l_{123} = a_0 + a_{123} \quad (2.31)$$

où l_0 est le contraste du facteur I (facteur moyen).

De manière analogue au calcul des effets pour les plans complets, la connaissance des structures des contrastes va nous permettre d'analyser l'influence des facteurs. Comme certains effets sont confondus, la phase d'interprétation des résultats d'un plan fractionnaire est assez délicate. Cette phase repose sur des hypothèses de travail [Goupy, 2000] qui sont très souvent valides (95% des cas) mais qu'il faudra tout de même vérifier à la fin de l'étude :

Hypothèse 1

Les interactions du troisième ordre ou d'ordre plus élevé sont considérées comme négligeables.

Hypothèse 2

Tous les coefficients aliasés dans un contraste faible sont eux-mêmes faibles.

Hypothèse 3

Si deux contrastes sont faibles, on supposera que leur interaction est faible.

Hypothèse 4

Si deux contrastes sont forts, on se méfiera de leur interaction qui peut l'être également.

2.3.2.3 Plans existants et résolution

Dans la section 2.3.2.1, nous avons montré que les plans fractionnaires sont notés 2^{k-p} . Pour qu'un plan fractionnaire existe, il faut que :

$$0 < p < k \quad (2.32)$$

De plus, comme les p facteurs supplémentaires du plan fractionnaire sont fonction des effets et interactions entre les $k - p$ facteurs principaux du plan de base, on a :

$$p < 2^{k-p} \quad (2.33)$$

Ainsi, par exemple, si $k=6$, seul les plans 2^{6-1} , 2^{6-2} , 2^{6-3} peuvent-être réalisés.

En outre, le nombre d'interactions [Faucher, 2006] d'ordre q peut-être calculé de la manière suivante :

$$N_{interaction\ d'ordre\ q} = C_k^q = \frac{k!}{q!(k-q)!} \quad (2.34)$$

Ainsi, le nombre maximum de facteurs pouvant être aliasés est égal à :

$$N_{nombre\ maximum\ de\ facteurs\ aliasés} = \sum_{q=2}^k C_k^q = 2^k - k - 1 \quad (2.35)$$

Pour finir, le nombre maximum de facteurs que l'on peut étudier est donc donné par :

$$N_{nombre\ maximum\ de\ facteurs\ étudiés} = \sum_{q=1}^k C_k^q = 2^k - 1 \quad (2.36)$$

Le choix du plan fractionnaire repose ainsi sur le nombre de facteurs étudiés, mais également sur sa **résolution** qui est un indicateur de qualité générale du plan [Linder, 2005]. La résolution d'un plan fractionnaire est le cardinal du plus petit élément du groupe de générateur d'alias. Par exemple, la résolution du plan 2^{3-1} est égale à trois.

Un plan est dit de **résolution III** lorsqu'il n'y a aucune confusion entre les effets principaux des facteurs. Ces effets principaux sont confondus avec des interactions de rang égal ou supérieur à 2.

Dans un plan de **résolution IV**, les effets principaux ne sont confondus qu'avec des interactions de rang supérieur ou égal à 3. Les interactions de rang 2 sont confondues entre elles et des interactions de rang supérieur ou égal à 3 et ainsi de suite .

Dans un plan de **résolution V**, les effets principaux et les interactions de rang 2 ne sont confondus qu'avec des interactions de rang supérieur ou égal à 3.

On recommande souvent d'utiliser un plan de **résolution III** si les **interactions sont négligeables**, un plan de **résolution IV** pour **tamiser les facteurs** et un plan de **résolution V ou plus** si l'on souhaite **modéliser le phénomène/système étudié** avec les facteurs influents. Un tableau récapitulatif nombre d'essais/nombre de facteurs (jusqu'à 8 facteurs) et résolution associée est proposé TABLE 2.3

Pour conclure, les plans fractionnaires possèdent tous les avantages d'un plan complet et ont l'avantage supplémentaire de nécessiter moins d'essais. Il convient néanmoins de bien respecter les hypothèses d'interprétation de ces plans afin d'obtenir les bonnes conclusions.

Les plans factoriels permettent donc de quantifier l'influence des facteurs (calcul des effets et/ou contrastes). Dans la section suivante, des méthodes d'analyses des résultats de ces plans sont proposées. Le logiciel Minitab[®], dédié aux statistiques appliquées à l'analyse de données, est utilisé pour cette phase d'étude. Les graphiques présentés sont ainsi issus d'études effectuées avec ce logiciel.

Nombre d'essais	Nombre de facteurs						
	2	3	4	5	6	7	8
4	P. C.	III					
8		P. C.	IV	III	III	III	
16			P. C.	V	IV	IV	IV
32				P. C.	VI	IV	IV
64					P. C.	VII	V
128						P. C.	VIII

TABLE 2.3 – Résolution des plans fractionnaires (P.C. = Plan complet)

2.3.3 Analyse statistique du modèle

2.3.3.1 Méthode de Lenth

La méthode de Lenth [Rabier, 2007] consiste à calculer une pseudo-erreur type (PSE pour Pseudo Standard Error) qui sera considérée comme la valeur séparant les facteurs significatifs des facteurs peu influents.

Ce paramètre est calculé de la manière suivante :

- 1). Calcul de la valeur absolue des effets (*cf.* section 2.3.1.3 $|a_i|$) ;
- 2). Calcul de $S = 1,5 \cdot \text{médiane } |a_i|$;
- 3). Calcul de la médiane des effets dont la valeur absolue est inférieure à $2,5 \cdot S$ (notée $\text{médiane } |a_i|_{|a_i| < 2,5 \cdot S}$) ;
- 4). On obtient ainsi $PSE = 1,5 \cdot \text{médiane } |a_i|_{|a_i| < 2,5 \cdot S}$.

Le diagramme de Pareto ainsi que le diagramme de Henry (*cf.* section 2.3.4) utilisent le **marge d'erreur (ME)** qui est égale à :

$$ME = t \cdot PSE \quad (2.37)$$

où PSE est la pseudo-erreur type et t correspond au quantile $(1 - \alpha/2)$ d'une distribution de Student à (Nombre d'effets/3) degrés de liberté (*cf.* TABLES de Student en annexes A.1 et A.2).

Le facteur α est appelé risque de première espère (*cf.* section 2.3.4.4). Il s'agit de l'erreur consistant à rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie (exemple à la section suivante avec le test de Fisher). Ce facteur est classiquement fixé à 5%.

Remarque : pour un plan factoriel,

- le nombre de degrés de liberté d'un **facteur A** est égal à $a - 1$;
- le nombre de degrés de liberté de l'**interaction entre un facteur A et un facteur B** est égal à $(a - 1)(b - 1)$;
- le nombre de degrés de liberté de l'**erreur** est égal à $n - p$;
- le nombre **total** de degrés de liberté est égal à $n - 1$;

où a est le nombre de niveau(x) du facteur A, b le nombre de niveau(x) du facteur B, n le nombre d'essais et p le nombre de paramètres.

2.3.3.2 Analyse de la variance

Selon Scheffé [Bertrand, 1986], l'analyse de la variance (ANAVAR ou ANOVA pour « *Analysis Of Variance* ») « consiste à analyser les données qui dépendent de plusieurs types d'effets opérant simultanément, afin de quantifier ces effets et, éventuellement, d'en évaluer l'importance ». Le principe de cette analyse est de comparer la variabilité induite par le changement des niveaux d'un facteur aux fluctuations aléatoires de la réponse (variabilité expérimentale).

L'analyse de la variance repose sur une décomposition judicieuse en sommes de carrés. Le facteur étudié comporte k modalités. Le plan réalisé comporte n_i répétitions pour le niveau j . Soit n observations y_{ij} avec $j = 1, \dots, k$ et $i = 1, \dots, n_j$ où y_{ij} désigne la valeur observée pour la $i^{\text{ème}}$ répétition du niveau j du facteur étudié.

Le modèle observé de l'analyse de la variance s'écrit :

$$y_{ij} - \bar{y} = (\hat{y}_j - \bar{y}) + (y_{ij} - \hat{y}_j) \quad (2.38)$$

Le modèle montre que les écarts entre les observations individuelles et la moyenne générale peuvent être décomposés en deux parties :

- les différences entre les moyennes observées pour les différentes modalités et la moyenne générale,
- les différences entre les observations et les moyennes pour les différentes modalités.

En utilisant l'équation 2.38, on peut écrire l'équation d'analyse de la variance :

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^k n_j (\hat{y}_j - \bar{y})^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \hat{y}_j)^2 \quad (2.39)$$

qui s'écrit également :

$$SST = SSR + SSE \quad (2.40)$$

où

SST désigne la somme totale des carrés des écarts (SS pour « *Sum of Squares* ») ;

SSE désigne la somme des carrés due à l'erreur ;

SSR désigne la somme des carrés due à la régression.

En divisant ces sommes par leur degré de liberté respectif, on obtient (MS pour « *Mean Squared* ») :

$MST = \frac{SST}{n-1}$, le carré moyen total ;

$MSE = \frac{SSE}{p-1}$, le carré moyen dû à l'erreur ;

$MSR = \frac{SSR}{n-p}$, le carré moyen dû à la régression.

où p désigne le nombre de coefficients du modèle, et n le nombre d'observations.

L'analyse de la variance est souvent synthétisée sous forme de tableau (cf. TABLE 2.4).

À la dernière colonne, on trouve une donnée statistique nommée F de Fisher : cette donnée permet de quantifier l'influence de la source de variation étudiée, c'est à dire d'un facteur, d'une interaction entre facteurs... Ainsi, il est possible de déterminer si le facteur étudié est influent ou

Source de variation	Degrés de liberté	Sommes des carrés des écarts	Carrés moyens	F de Fisher
Facteurs étudiés	p-1	SSR	$MSR = \frac{SSR}{p-1}$	$F = \frac{MSR}{MSE}$
Erreur	n-p	SSE	$MSE = \frac{SSE}{n-p}$	
Totale	n-1	SST	$MST = \frac{SST}{n-1}$	

TABLE 2.4 – Tableau d’analyse de la variance à un facteur avec répétitions

ne l’est pas par le biais du test de Fisher.

Test de Fisher :

Hypothèses :

H_0 : Les variances des échantillons sont homogènes \Rightarrow la source de variation est sans effet ;

$H_1 = \overline{H_0}$.

Règle de décision :

Si $F \geq f_{\alpha, \nu_1, \nu_2}$, on rejette H_0 au niveau de α ;

Si $F < f_{\alpha, \nu_1, \nu_2}$, on accepte H_0 au niveau de α .

avec

f_{α, ν_1, ν_2} un fractile de la loi de Fisher-Snedecor à ν_1 et ν_2 degrés de liberté ;

ν_1 le nombre de degrés de liberté associé à la source de variation testée ;

ν_2 le nombre de degrés de liberté associé à l’erreur.

Quelques tables de Fisher sont données à titre d’exemple en annexes [A.1](#) et [A.2](#).

A noter, comme le test de Fisher fait intervenir un test d’hypothèse, les conditions de normalité, égalité des variances et indépendance des résidus doivent être vérifiées pour mener à bien l’analyse de la variance [[Linder, 2005](#)].

2.3.3.3 Test de Student

Le test de Student permet l’étude de la significativité de l’effet d’un facteur au niveau α . Le test de Fisher peut être considéré comme une généralisation du test de Student. Aussi, ce test repose également sur les conditions de normalité, égalité des variances et indépendance des résidus [[Linder, 2005](#)].

Le *t de Student* associé à un facteur A au niveau α est égal à :

$$t_{A_i} = \frac{a_{A_i}}{\text{ErreurType}(a_{A_i})} \quad (2.41)$$

où :

$$Erreur\ Type(a_{A_i}) = \hat{\sigma} \cdot \sqrt{\beta_{ii}} \quad (2.42)$$

avec :

- a_{A_i} l'effet du facteur A au niveau i ;
- $\hat{\sigma}^2 = MSE$, $\hat{\sigma}^2$ la variance estimée des résidus ;
- β_{ii} le $i^{ième}$ élément diagonal de $(X^T.X)^{-1}$.

Un effet sera dit significatif s'il est, pour un risque donné noté α , significativement différent de 0.

Hypothèses du test :

$$H_0 : a_i = 0 :$$

$$H_1 = \overline{H_0} .$$

Règle de décision :

Soit $N = n - p$ avec n le nombre d'expériences effectuées et p le nombre d'effets (l'effet moyen doit être pris en compte). Dans la table de Student, se trouve la valeur critique $t_{crit}(\alpha, N)$ correspondant à N degrés de liberté et à un risque α .

Si $|t_i| > t_{crit}(\alpha, N)$, on rejette H_0 au risque α ;

Si $|t_i| < t_{crit}(\alpha, N)$, on accepte H_0 au risque α .

Ainsi, si l'hypothèse H_0 est acceptée, le facteur associé à l'effet étudié n'a pas d'influence sur la réponse.

2.3.4 Analyse graphique du modèle

2.3.4.1 Diagramme des effets moyens

Un effet moyen est défini comme la variation de la réponse lorsque le facteur change de modalité (ou niveau). Le graphique des effets moyens consiste donc à représenter, pour chaque facteur, la moyenne des réponses obtenues lorsque celui-ci prend ses différents niveaux. En comparant les variations liées aux différents facteurs, on peut ainsi classer les facteurs selon leur influence.

Sur l'exemple présenté FIGURE 2.5, nous constatons que le passage du niveau bas au niveau haut du facteur C induit une grande variation sur la moyenne de la sortie observée, contrairement au facteur B dont le changement de niveau n'a quasiment aucune répercussion sur la sortie. Ainsi, le facteur C est le facteur le plus influent et le facteur B est dit peu significatif.

2.3.4.2 Diagramme des interactions

Le diagramme des interactions repose sur le même principe que le tracé des effets moyens. Dans le cas où, par exemple, les interactions sont d'ordre deux, il représente la moyenne de la sortie mesurée lorsque deux facteurs passent du niveau bas au niveau haut.

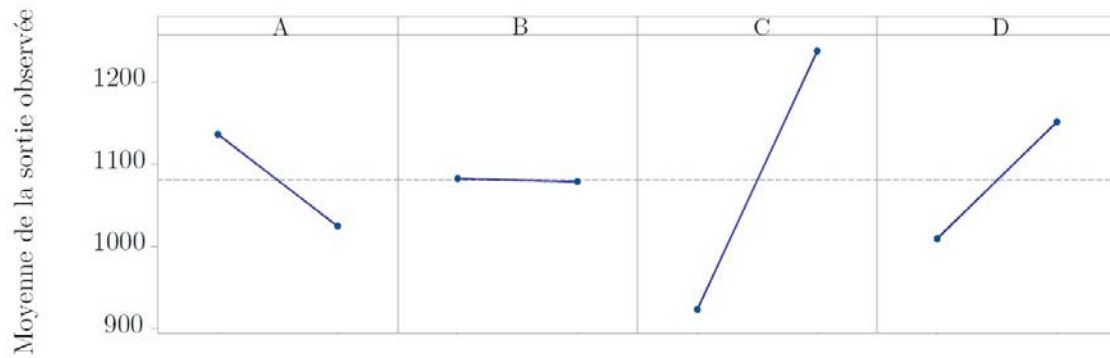


FIGURE 2.5 – Graphique d'effets moyens

La FIGURE 2.6 est un exemple de diagramme des interactions d'ordre deux. Ce diagramme peut être divisé en cellules : à chaque cellule correspond une interaction. Par exemple, la cellule en bas à gauche étudie l'influence du passage du niveau bas au niveau haut du facteur A lorsque D est au niveau bas (droite bleu) ou niveau haut (droite rouge). Les deux droites sont quasiment parallèles, il n'y a donc pas d'interaction entre A et D. Plus les droites s'écartent de la parallèle, plus l'interaction est importante.

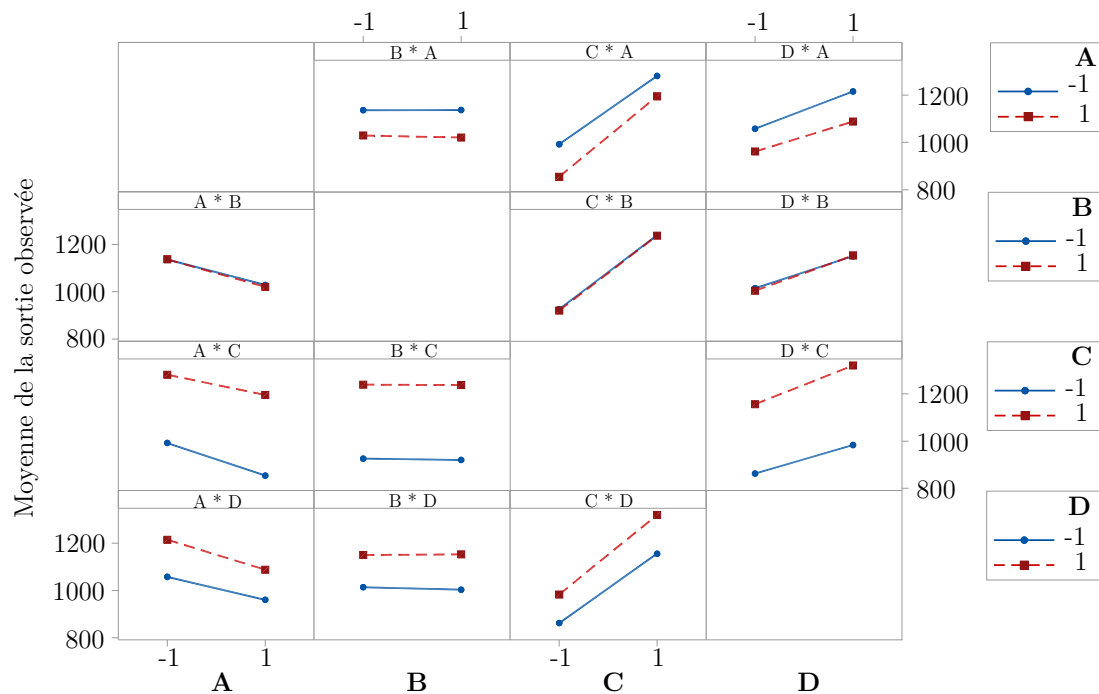


FIGURE 2.6 – Exemple de diagramme des interactions

2.3.4.3 Diagramme de Pareto

La loi de Pareto créée par le célèbre économiste italien Vilfredo Pareto (1848-1923) stipule que 20% des causes possibles produisent à elles seules 80% des effets [Hohmann, 2010]. Cette loi est aussi nommée « loi des 80/20 ». Elle permet ainsi de caractériser les causes qui sont à l'origine du plus grand nombre d'effets.

Dans cette représentation, les valeurs absolues des coefficients sont ordonnées par ordre décroissant. La FIGURE 2.7 présente un exemple de diagramme de Pareto.

Lorsqu'il n'y a pas de terme d'erreur, on retrouve sur l'axe des abscisses la valeur absolue de l'effet non-normalisé, et lorsqu'il y a un terme d'erreur, la valeur absolue de l'effet normalisé. L'effet normalisé aussi appelé *t de Student* est égal au coefficient divisé par son erreur type (cf. section 2.3.3.3). Ainsi, par exemple, l'effet normalisé du facteur A est égal à :

$$E_{norm_A} = \frac{a_A}{ErreurType(a_A)} \quad (2.43)$$

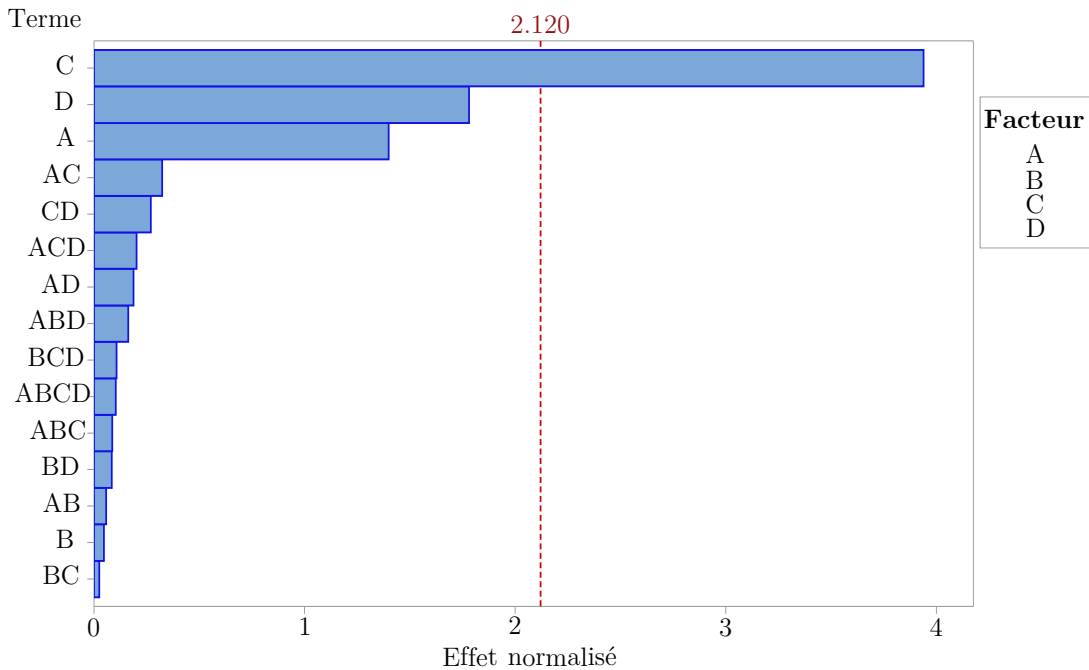


FIGURE 2.7 – Exemple de diagramme de Pareto des effets normalisés ($\alpha = 0,05$)

De plus, une ligne verticale délimite les facteurs significatifs et non significatifs. La valeur associée à cette droite verticale dépend du terme d'erreur :

- si le terme d'erreur a un ou plusieurs degré(s) de liberté, la valeur de t associée à la droite rouge correspond au quantile $(1 - \alpha/2)$ d'une distribution de Student avec des degrés de liberté égaux aux degrés de liberté du terme d'erreur ;
- si le terme d'erreur a zéro degré de liberté, la valeur associée à la droite est celle de la marge d'erreur présentée section 2.3.3.1.

Dans l'exemple présenté FIGURE 2.7, seul le facteur C est significatif car l'effort normalisé de C est supérieur à $t_{Student} = 2,12$ (cf. annexe A.2).

2.3.4.4 Diagramme de Daniel

Le diagramme de Daniel utilise le test de Henry [AFNOR, 1995] qui est un test graphique de normalité d'une distribution. Ce diagramme permet de comparer la fréquence cumulée réelle de la distribution observée et la fréquence cumulée d'une distribution normale.

Pour effectuer cette comparaison, on utilise un repère gaussio-arithmétique, c'est-à-dire comportant une échelle gaussienne sur l'axe des ordonnées et une échelle arithmétique sur l'axe des abscisses. La représentation de la fréquence cumulée d'une distribution normale se présente ainsi sous la forme d'une droite dans ce repère, nommée droite de Henry (cf. FIGURE 2.8).

Comme pour le diagramme de Pareto, lorsqu'il n'y a pas de terme d'erreur, on retrouve sur l'axe des abscisses la valeur absolue de l'effet non-normalisé, et lorsqu'il y a un terme d'erreur, la valeur absolue de l'effet normalisé. Sur l'axe des ordonnées se trouve la fréquence cumulée croissante associée à l'effet de chaque facteur (ou interaction).

Si pour un facteur, cette fréquence cumulée en fonction de l'effet, normalisé ou pas, se situe près de la droite de Henry, alors ce facteur suit une loi normale, il peut être assimilé à une erreur expérimentale et est ainsi peu influent. Si au contraire, cette fréquence cumulée en fonction de l'effet, normalisé ou pas, est éloignée de la droite de Henry, alors le facteur est dit significatif.

Plus précisément :

- si le terme d'erreur a zéro degré de liberté, les facteurs dont la valeur absolue de l'effet est supérieure à la marge d'erreur (ME) seront dits significatifs ;
- si le terme d'erreur a un ou plus degré(s) de liberté, les facteurs dont la valeur de p (p-value) est supérieure à α sont dits significatifs.

La valeur de p (probabilité de signification) est la plus petite des valeurs de risque de première espèce (cf. TABLE 2.5) pour lesquelles la décision serait de rejeter H_0 .

	Hypothèse nulle vraie	Hypothèse nulle fausse
Décision : ne pas rejeter	Décision juste : $p = 1 - \alpha$	Erreur de deuxième espèce $p = \beta$
Décision : rejeter	Erreur de première espèce $p = \alpha$	Décision juste : $p = 1 - \beta$

TABLE 2.5 – Type d'erreurs

Plus la valeur de p est petite, plus la probabilité de faire une erreur en rejetant l'hypothèse nulle est faible. Une valeur limite de 0,05 est souvent utilisée : ainsi l'hypothèse nulle peut-être rejetée si la valeur de p est inférieure à 0,05.

Les étapes du calcul de cette valeur sont développées dans l'ouvrage écrit par Alain MEOT [Meot, 2003].

Pour conclure sur l'étude de l'exemple présenté FIGURE 2.8, il apparaît que seul le facteur C est significatif.

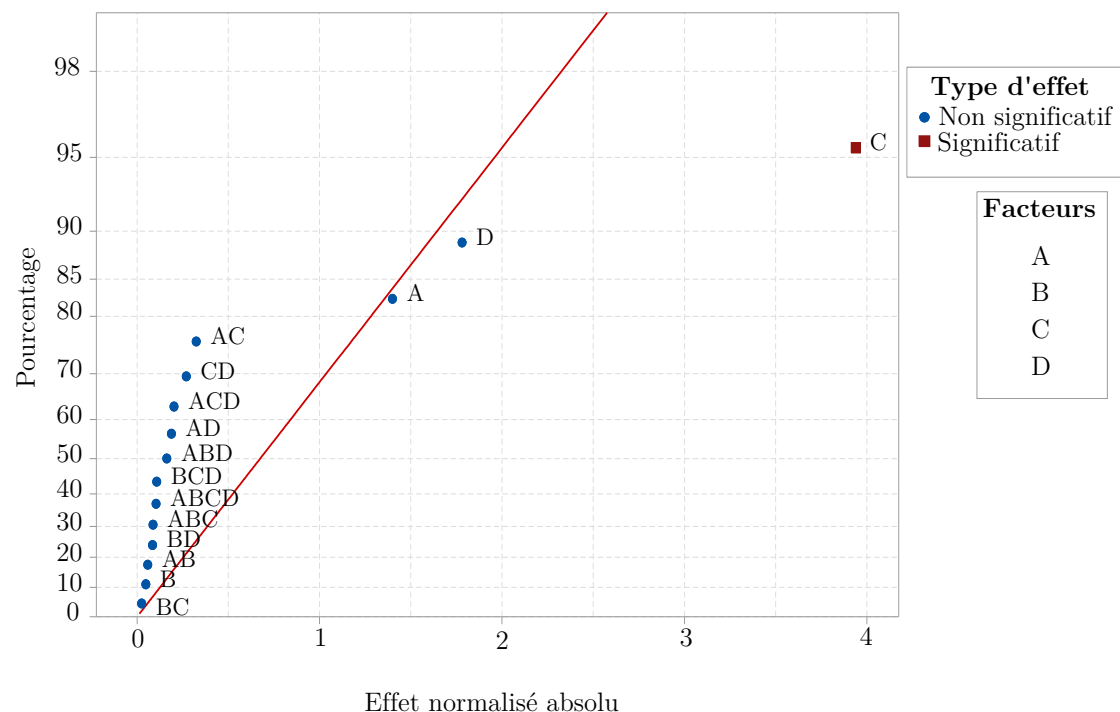


FIGURE 2.8 – Exemple de demi-droite de Henry des effets normalisés ($\alpha = 0.05$)

Il existe donc plusieurs méthodes permettant d'étudier les résultats du plan factoriel créé. Cependant, dans de nombreuses situations, l'utilisation des plans de criblage n'est pas suffisante. En effet, certaines études nécessitent l'utilisation d'un modèle plus complexe afin de traduire plus précisément le phénomène étudié.

Il semble donc nécessaire de disposer de paramètres permettant d'évaluer la capacité ou non du modèle à bien décrire en moyenne le phénomène étudié. Pour cela, un test d'ajustement du modèle peut être utilisé, ainsi que le coefficient de corrélation linéaire multiple (*cf.* section suivante).

2.4 Ajustement de modèle

Un suivi de notre démarche est présenté FIGURE 2.9.

2.4.1 Test d'ajustement du modèle

Le terme d'erreur est souvent décomposé en deux : l'erreur liée au manque d'ajustement [Goupy et Creighton, 2006] et l'erreur qui traduit la dispersion des résultats c'est-à-dire l'erreur expérimentale.

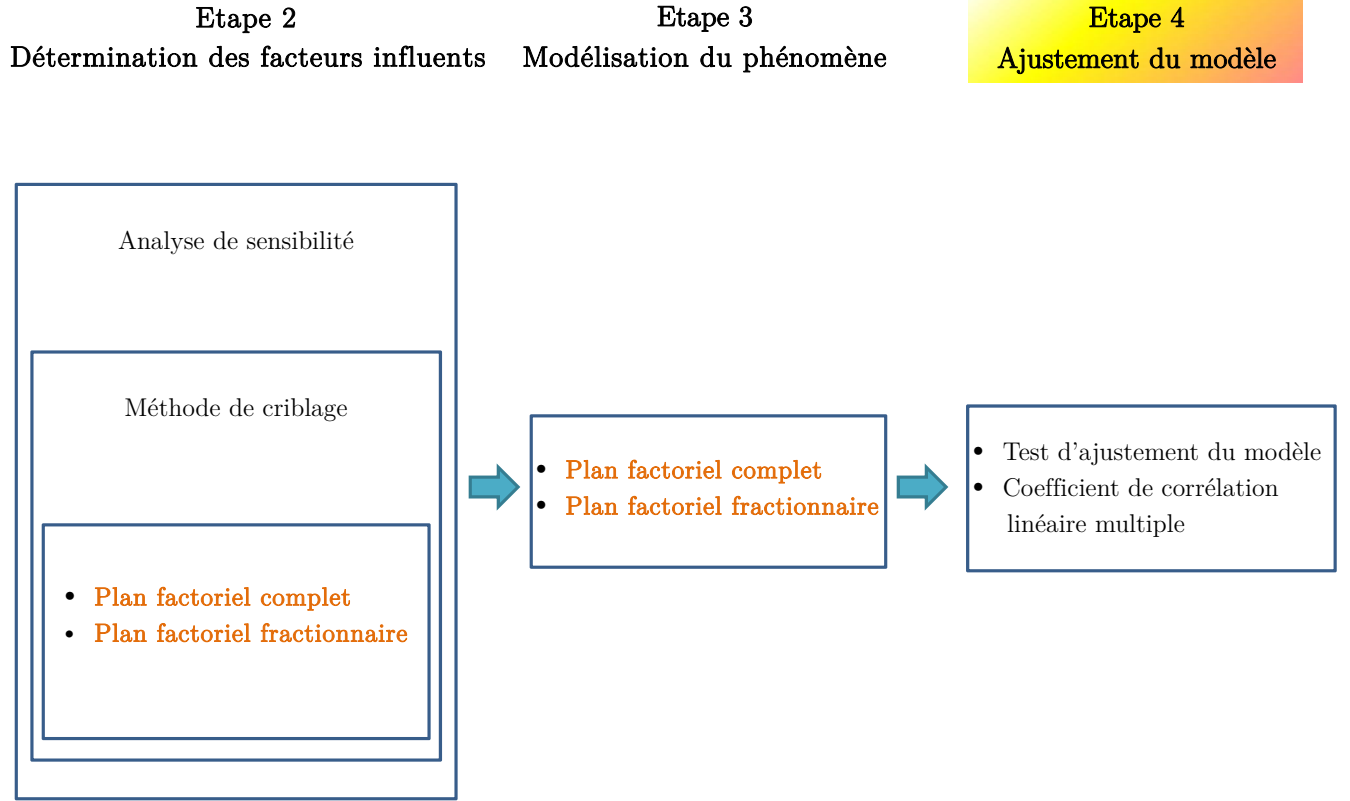


FIGURE 2.9 – Schéma de suivi de la démarche employée : étape 4, ajustement du modèle

D'un point de vue mathématique, en réutilisant les expressions définies dans l'ANOVA présentée à la section 2.3.3.2, cette décomposition se traduit de la façon suivante :

$$SS_{res} = SS_{PE} + SS_{LOF} \quad (2.44)$$

Avec :

$$SS_{res} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \hat{y}_j)^2, \text{ la somme résiduelle des carrés des écarts ;}$$

$$SS_{PE} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2, \text{ la somme des carrés due à l'erreur pure ;}$$

$$SS_{LOF} = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{y}_j - \hat{y}_j)^2, \text{ la somme des carrés due au manque d'ajustement.}$$

Les sommes des carrés SS_{LOF} et SS_{PE} ont respectivement $m - p$ et $n - m$ degrés de liberté, on peut donc écrire :

$$MS_{LOF} = \frac{SS_{LOF}}{m - p} \quad (2.45)$$

et

$$MS_{PE} = \frac{SS_{PE}}{n - m} \quad (2.46)$$

avec m le nombre total de conditions expérimentales distinctes, $MSLOF$ et $MSPE$ respectivement les sommes moyennes des carrés, dues au manque d'ajustement et à l'erreur pure.

Le coefficient F de Fisher associé au manque d'ajustement est donc calculé de la manière suivante :

$$F = \frac{MSLOF}{MSPE} \quad (2.47)$$

et le test d'ajustement peut, ainsi, être effectué.

Test d'ajustement du modèle :

Hypothèses :

H_0 : Le modèle est bien ajusté en moyenne ;

$H_1 = \overline{H_0}$.

Règle de décision :

Rejet de H_0 au niveau de α si $F \geq f_{\alpha, m-p, n-m}$

avec

$f_{\alpha, m-p, n-m}$ un fractile de la loi de Fisher-Snedecor à $m - p$ et $n - m$ degrés de liberté.

Ce test permet donc de vérifier le bon ajustement du modèle obtenu. Un autre paramètre permet d'effectuer cette évaluation : le coefficient de corrélation linéaire multiple.

2.4.2 Coefficient de corrélation linéaire multiple

Le modèle obtenu est « bien ajusté » lorsque la somme des carrés due à l'erreur est faible. Le coefficient de corrélation linéaire multiple s'exprime par la relation suivante :

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (2.48)$$

Ainsi, $0 \leq R^2 \leq 1$ et le modèle est bien ajusté lorsque R^2 est proche de 1 : la condition classiquement choisie est $R^2 \geq 0.95$.

Le coefficient R^2 ajusté est souvent utilisé à la place du coefficient R^2 : il s'agit en fait d'une correction qui permet de prendre en compte le nombre de variables utilisées dans le modèle. On a :

$$R_{ajusté}^2 = 1 - \frac{MSE}{SST/df_T} \quad (2.49)$$

avec df_T le nombre de degrés de liberté de SST , c'est-à-dire $n - 1$.

En conclusion, grâce au test d'ajustement ou à la détermination du coefficient de corrélation linéaire multiple, il est possible de mieux s'assurer que le modèle est bien ajusté ou ne l'est pas. Si le modèle est bien ajusté, la démarche est terminée. Dans le cas contraire, il convient d'augmenter la complexité du modèle : ceci est possible via les plans pour surfaces de réponses (cf. FIGURE 2.10).

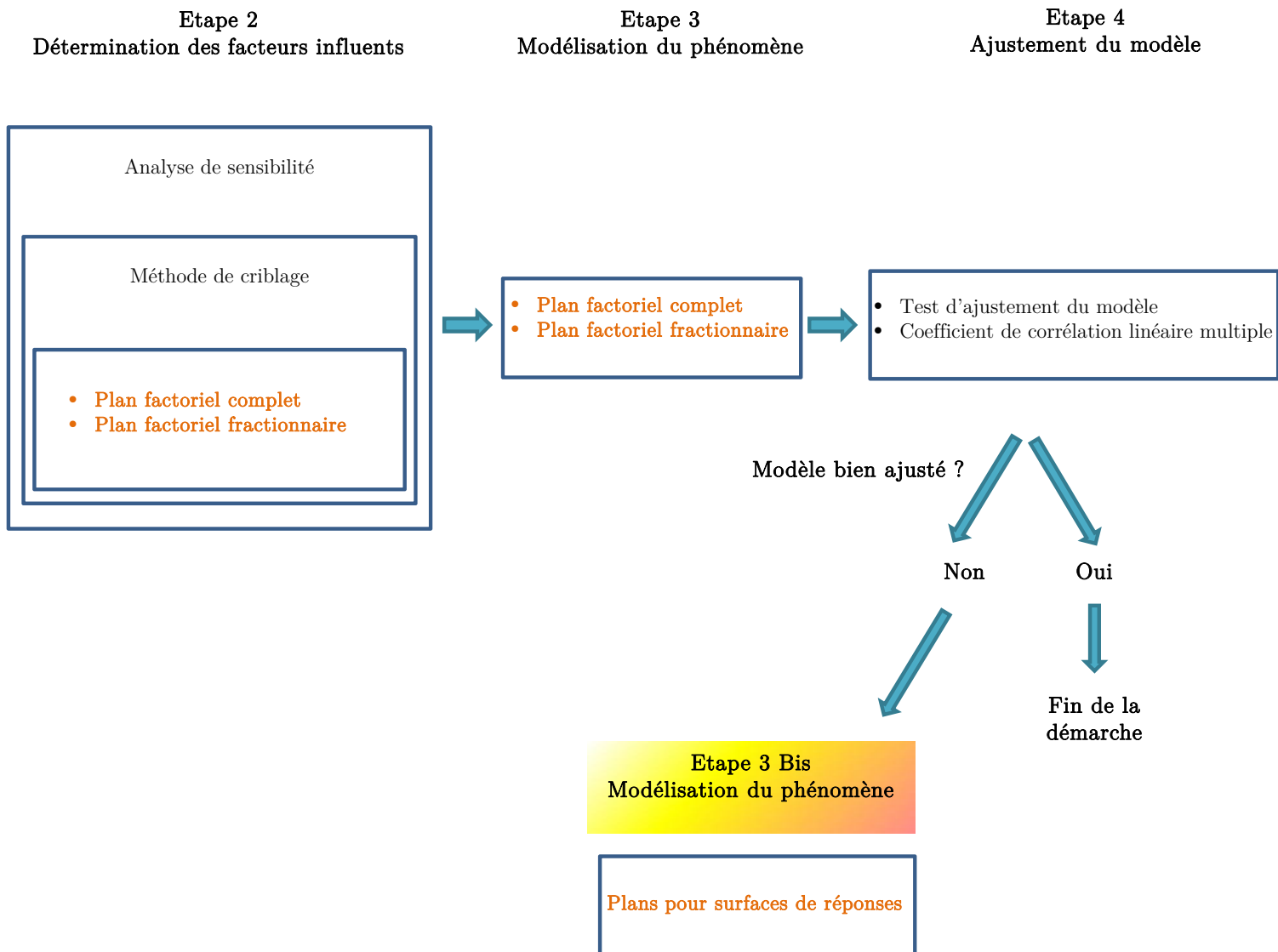


FIGURE 2.10 – Schéma de suivi de la démarche employée : étape 3 Bis, modélisation du phénomène

2.5 Plans pour surfaces de réponses

Il existe de multiples plans pour surfaces de réponses. Les plus utilisés sont les plans factoriel complet 3^k , les plans composites centrés, les plans de Doehlert et les plans de Box et Behnken.

Les plans factoriel complet 3^k sont formés de toutes les combinaisons des niveaux minimum, milieu et maximum de k facteurs. Le nombre d'essais est 3^k . Ils sont, comme les plans 2^k , très simples, possèdent de bonnes propriétés statistiques mais sont très coûteux en terme de nombre d'essais.

Les plans composites centrés, plus compliqués à mettre en œuvre (*cf.* section suivante), possèdent également de bonnes propriétés statistiques et demandent un nombre moins important d'essais que les plans 3^k .

Les plans de Doehlert [Doehlert, 1970] sont formés de N_0 essais au centre du domaine et de $k^2 + 2k$ essais répartis « le plus uniformément possible » sur une sphère de rayon 1. Ils sont peu coûteux et ont des propriétés statistiques moins « parfaites » que les plans composites et les plans factoriels 3^k .

Les plans de Box-Behnken [Box et Behnken, 1960] se composent d'une fraction d'un plan factoriel complet 3^k . Ils sont une alternative aux plans composites car ils requièrent seulement trois niveaux pour chaque facteur.

Dans la section suivante, nous proposons de présenter plus précisément les plans composites centrés car ils possèdent des propriétés statistiques très intéressantes et demandent moins d'essais qu'un plan complet.

2.5.1 Présentation

Le modèle postulé des plans pour surfaces de réponses est un modèle du second ordre qui s'écrit [Tinsson, 2010] :

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sum_{i=1}^k a_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} \sum a_{ij} x_i x_j \quad (2.50)$$

x_i ($i = 1 \dots k$) : les niveaux pris par les facteurs i ;

a_0 : l'effet moyen ;

a_i ($i = 1 \dots k$) : l'effet linéaire du $i^{\text{ème}}$ facteur ;

a_{ii} ($i = 1 \dots k$) : l'effet quadratique du $i^{\text{ème}}$ facteur ;

a_{ij} ($i, j = 1 \dots k, i < j$) : l'effet d'interaction entre les facteurs i et j .

Ce modèle comporte donc m inconnues, avec :

$$m = 1 + k + C_k^2 + k = \frac{(k+2)(k+1)}{2} \quad (2.51)$$

2.5.2 Plans composites centrés

Les plans composites centrés (« *CCD* » pour « *Composite Center Design of Experiments* ») à $k - p$ facteurs sont constitués de [Tinsson, 2010] :

- une partie factorielle contenant tous les sommets du cube $[-1, 1]^k$ ou une fraction régulière de résolution égale à V (ou plus) de ces sommets ;
- une partie axiale contenant tous les points situés sur les axes du repère à une même distance α du centre du domaine expérimental ;
- une partie centrale contenant k_0 éventuelles répliques du centre du domaine expérimental.

Ce type de plan comporte ainsi n essais et :

$$n = 2^{k-p} + 2k + k_0 \quad (2.52)$$

Prenons l'exemple d'un plan composite à deux facteurs. Le domaine expérimental de ce plan est représenté FIGURE 2.11 et le plan d'expérience associé est donné TABLE 2.6.

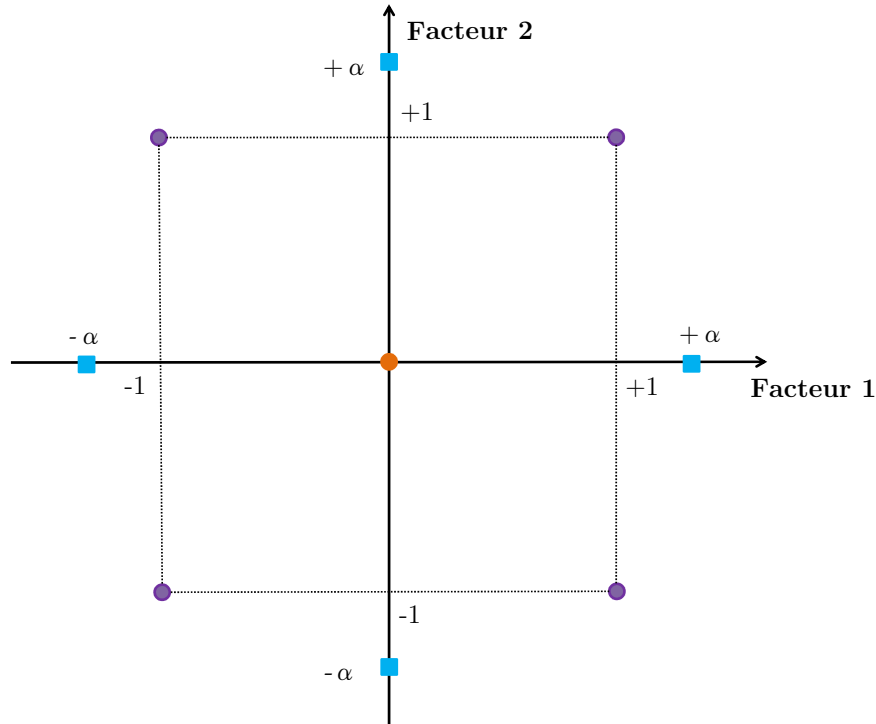


FIGURE 2.11 – Représentation graphique d'un CCD à deux facteurs

N° essai	Facteur 1	Facteur 2
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1
5	0	0
6	$-\alpha$	0
7	$+\alpha$	0
8	0	$-\alpha$
9	0	$+\alpha$

TABLE 2.6 – Matrice d'expérience d'un CCD à deux facteurs

Le modèle *a priori* de ce plan s'écrit :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 \quad (2.53)$$

et la matrice du modèle X (on choisit une seule réplique centrale, cf. essai N° 5 de la TABLE 2.6) s'écrit :

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ -\alpha & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & +1 \\ +\alpha & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & +1 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & \alpha^2 & +1 \\ 0 & +\alpha & 0 & 0 & \alpha^2 & +1 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

La première colonne de cette matrice X correspond à la colonne de signe du facteur 1, la deuxième à celle du facteur 2, la troisième à celle de l'interaction entre 1 et 2, la quatrième à celle du facteur 1^2 , la cinquième à celle du facteur 2^2 et la dernière à celle du facteur moyen.

Afin de calculer les coefficients du modèle présenté équation (2.53), il faut résoudre l'équation :

$$Y = X.A \quad (2.55)$$

La matrice X n'est pas carrée donc elle n'est pas inversible. Cependant, la matrice $X^T.X$ est une matrice carrée et inversible car nous supposons que son déterminant est non nul.

L'équation (2.53) peut s'écrire :

$$X^T.Y = X^T.X.A \quad (2.56)$$

d'où :

$$A = (X^T.X)^{-1}X^T.Y \quad (2.57)$$

Par ailleurs, les plans composites centrés possèdent des propriétés intéressantes selon la valeur de α . En effet, ils peuvent être isovariants par transformations orthogonales, à faces centrées, équiradiaux ou presque orthogonaux. Ces aspects sont développés ci-après.

2.5.2.1 Isovariance par transformations orthogonales

Un plan est dit isovariant par transformations orthogonales si pour tout point x du domaine expérimental et pour toute transformation orthogonale T de \mathbb{R}^n :

$$Var\hat{Y}(Tx) = Var\hat{Y}(x) \quad (2.58)$$

Cela signifie ainsi que « la fonction de variance ne dépend que de la distance au centre du domaine expérimental. Ainsi, aucune direction n'est privilégiée. » [AFNOR, 2003]

Un plan d'expérience composite centré est isovariant par transformations orthogonales si et seulement si :

$$\alpha = (2^{k-p})^{1/4} \quad (2.59)$$

2.5.2.2 CCD à faces centrées

Un plan composite centré (« *CCD* » pour « *Composite Center Design of Experiments* ») est dit à faces centrées lorsque $\alpha = 1$. Ce type de plan est intéressant car les facteurs ne prennent que trois niveaux (-1, 0 et 1) contre 5 si $\alpha \neq 1$.

2.5.2.3 CCD équiradiaux

Dans un plan équiradial, toutes les unités expérimentales (sans les répliques centrales) sont situées à la même distance du centre du domaine. Si $S(r)$ représente la sphère de rayon r , pour tout CCD à k facteurs, les points de la partie factorielle sont à la surface de $S(\sqrt{k})$ et les points de la partie axiale sont à la surface de $S(\alpha)$. Un CCD est donc équiradial si et seulement si :

$$\alpha = \sqrt{k} \quad (2.60)$$

2.5.2.4 CCD presque orthogonaux

Les CCD ne sont pas orthogonaux à cause des termes quadratiques. Néanmoins, ils peuvent se rapprocher d'un plan orthogonal (on parle de plan presque-orthogonal) , si et seulement si :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{2^{k-p}}(\sqrt{n} - \sqrt{2^{k-p}})}{2}} \quad (2.61)$$

2.5.2.5 CCD presque-orthogonaux et isovariant par rotation

Afin que le CCD soit presque-orthogonal et isovariant par rotation, Kluri et Cornell ont montré qu'il faut tout d'abord choisir la distance axiale α afin de respecter la condition d'isovariance par rotation (cf. section 2.5.2.1), puis ajouter les points centraux avec [Khuri et Cornell, 1996] :

$$k_0 = 4\sqrt{2^{k-p}} + 4 - 2k \quad (2.62)$$

Pour conclure, un tableau de synthèse des différentes propriétés énoncées précédemment est proposé TABLE 2.7. Ces plans sont très souvent analysés graphiquement par le biais de graphiques de contour ou de diagrammes de surfaces.

Choix de α	Nombre de facteurs $k - p$	2	3	4	5	5	6	6	7	8
	Nombre de générateurs p	0	0	0	0	1	0	1	1	2
	Nombre de coefficients du modèle m	6	10	15	21	21	28	28	36	45
	Rotabilité	1.41	1.68	2	2.38	2	2.83	2.38	2.83	2.83
	Presque-orthogonalité ($N_0 = 1$)	1	1.22	1.41	1.6	1.55	1.76	1.72	1.88	2
	Presque-orthogonalité ($N_0 = 2$)	1.08	1.29	1.48	1.68	1.61	1.82	1.78	1.94	2.05
	Presque-orthogonalité ($N_0 = 3$)	1.15	1.35	1.55	1.72	1.66	1.88	1.84	2	2.11
	N_0 Presque-orthogonalité et rotabilité	8	9	12	17	10	24	15	22	20

TABLE 2.7 – Quelques propriétés des CCD

2.5.3 Analyse du modèle

Dans cette section, nous allons présenter deux méthodes graphiques qui peuvent être appliquées à ce type de plan : les graphiques de contour et les diagrammes de surfaces, qui servent à rechercher un maximum ou un optimum de la réponse étudiée.

2.5.3.1 Graphique de contour

Le graphique de contour ou courbe d'isoréponse (*cf.* exemple FIGURE 2.12) consiste à considérer la surface de réponse qui correspond à l'équation de régression, dans un espace à trois dimensions (3 facteurs étudiés), et à déterminer sur cette surface des courbes d'égale « valeur de sortie mesurée ». Ce graphique est d'une grande utilité lorsque l'on cherche les conditions pour obtenir par exemple le maximum ou un optimum de la sortie étudiée.

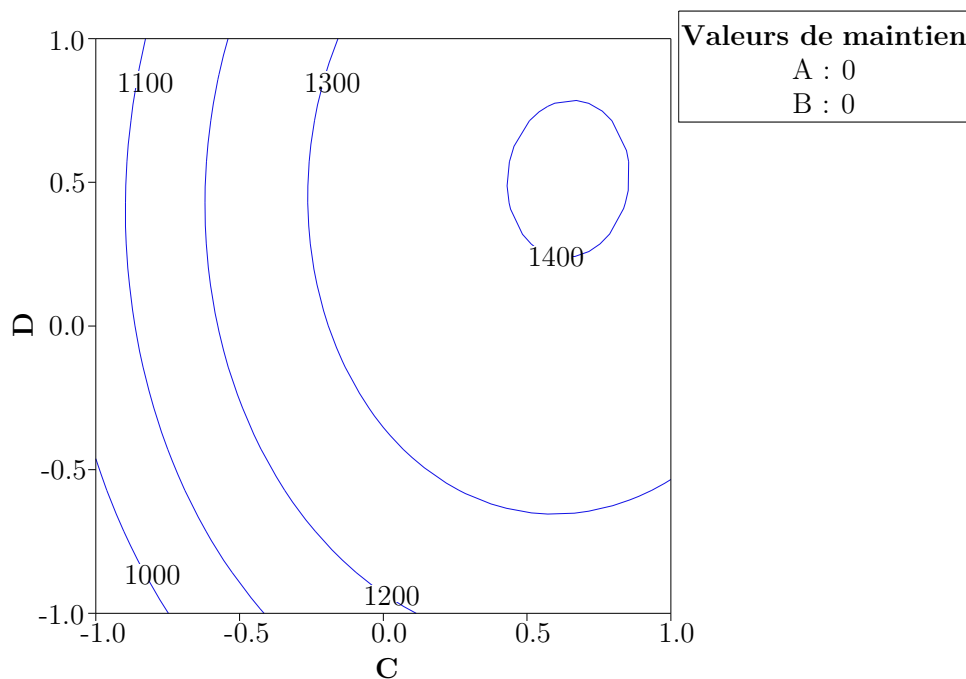


FIGURE 2.12 – Exemple de courbe d'isoréponses

2.5.3.2 Diagramme de surface

La diagramme de surface permet de visualiser la surface de régression dans un espace à trois dimensions. Sur les axes X,Y, on retrouve les facteurs, et sur l'axe Z la variation de la réponse modélisée (*cf.* exemple FIGURE 2.13). Ce diagramme est également très utile dans la recherche d'optimum de la réponse.

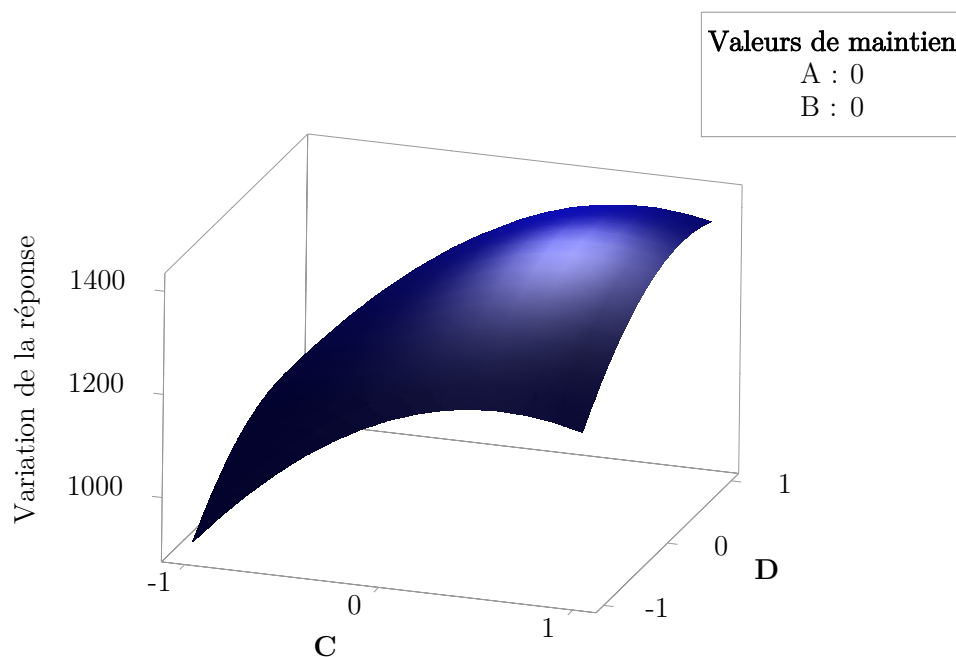


FIGURE 2.13 – Représentation des variables centrées réduites et du domaine expérimental

2.6 Conclusion

Différents plans d'expériences ont été présentés. Les plans de criblage étudiés, c'est à dire les plans factoriels complets ou fractionnaires, sont souvent utilisés au début de chaque étude, étant donné leur simplicité. Ils permettent de déterminer les facteurs influents sur la sortie et de modéliser le phénomène étudié.

En fonction du résultat obtenu au test d'ajustement du modèle, l'étude peut nécessiter d'appliquer un second plan d'expérience, qui sera un plan pour surfaces de réponses par exemple.

Nous proposons d'appliquer ces notions, dans le prochain chapitre, à l'étude du comportement transitoire des pneumatiques.

Modélisation du comportement transitoire du pneumatique par un modèle à paramètres variants

Sommaire

3.1	Introduction	66
3.2	Analyse fréquentielle du pneumatique	66
3.2.1	Présentation du banc d'essais Flat Trac [®]	66
3.2.2	Présentation des essais	67
3.2.3	Diagramme de Bode : $F_y/\alpha = f(w)$	69
3.2.4	Méthode d'identification des paramètres variants	71
3.3	Détermination des facteurs influents en vue de l'élaboration d'un modèle transitoire du pneumatique	72
3.3.1	Plan factoriel complet	72
3.3.2	Analyse du modèle obtenu avec le plan complet	77
3.3.3	Plan factoriel fractionnaire	84
3.3.4	Analyse du modèle obtenu avec le plan fractionnaire	86
3.4	Test d'ajustement des modèles obtenus	87
3.5	Conclusion	88

3.1 Introduction

Dans la littérature (*cf.* Chapitre 1), le comportement transitoire du pneumatique est très souvent modélisé sous forme d'une fonction de transfert du premier ordre ou du second ordre.

Tel est le cas du modèle dit de Ballant (*cf.* section 1.4.2) qui est un modèle transitoire de pneumatiques déjà très largement utilisé chez Renault. Contrairement à beaucoup de modèles transitoires, la procédure d'identification de ses paramètres sur banc est bien connue en interne chez Renault. Nous avons ainsi choisi de l'étudier plus précisément.

Pour cela, une analyse fréquentielle du comportement transitoire du pneumatique (via des essais sur banc Flat Trac[®]) est réalisée afin de valider ou non ce modèle. Dans un second temps, une étude par plan d'expériences de la nouvelle version du modèle de Ballant est présentée.

3.2 Analyse fréquentielle du pneumatique

3.2.1 Présentation du banc d'essais Flat Trac[®]

Les essais ont été effectués sur un banc d'essais MTS nommé Flat-Trac[®] III CT Tire (CT pour Cornering-Traction).

Ce banc d'essais permet de caractériser le comportement stationnaire et dynamique du pneumatique [FT2, 2002]. Par exemple, par le biais d'essais stationnaires, il est possible de déterminer la poussée de carrossage du pneumatique, son « *Ply-Steer* » et sa conicité, son uniformité latérale ou radiale ... Le mode « *Spindle Drive* » (Accouplement Moteur/Frein) du banc d'essais assure la caractérisation longitudinale et longitudinale/couplée du pneumatique. Par ailleurs, des tests de réponse en fréquence dynamique ou des sollicitations sinusoïdales peuvent être effectuées pour caractériser la dynamique du pneumatique, ainsi que des tests d'usure.

Les caractéristiques de ce banc d'essais ont été synthétisées à la FIGURE 3.1 [FT2, 2002]. En effet, les paramètres d'entrée de ce banc d'essais sont la dérive (ou la charge latérale), le rayon sous charge (ou la charge verticale), l'angle de carrossage, la vitesse de roulement, le pseudo-glissement et la pression de gonflage. En sortie, ce banc permet de mesurer le torseur d'efforts et moments au centre roue.

Deux schémas de la Flat Trac, un vu de face et un second vu de côté, sont proposés FIGURE 3.2(a) et 3.2(b) afin de situer plus précisément les différents capteurs et actionneurs.

Il est à noter que la charge verticale à spécifier doit être fonction de la charge *ETRTO* (F_{zETRTO}). Le sigle *ETRTO* signifie European Tyre and Rim Technical Organisation (Organisation technique européenne du pneumatique et de la jante) et désigne un organisme de normalisation du pneumatique [ETR, 2014].

Cette organisme a pour objectif :

- de favoriser l'harmonisation des normes nationales afin d'assurer l'interchangeabilité des pneumatiques, jantes et valves en Europe ;
- d'établir des dimensions d'ingénierie communes, les caractéristiques de la charge et la pression et définir des directives opérationnelles ;
- de promouvoir le libre échange d'informations techniques concernant les pneumatiques, jantes et valves.

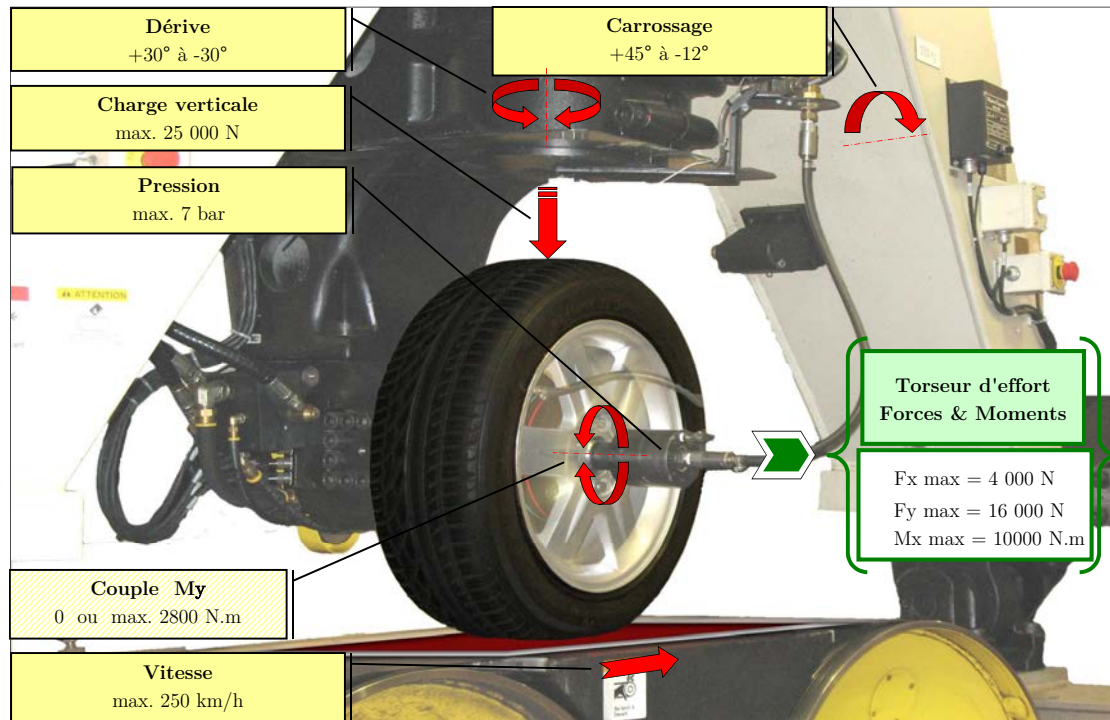


FIGURE 3.1 – Schéma de synthèse des caractéristiques de la Flat Trac

L'ETRTO travaille également en coopération avec l'ISO (Organisation internationale de normalisation). Certaines normes sur le pneumatique sont par ailleurs issues de cette collaboration [AFNOR, 2013] [AFNOR, 2010] [AFNOR, 2006] ...

F_{zETRTO} correspond à la charge maximale supportée par le pneumatique qui a été spécifiée par l'ETRTO. Elle correspond au produit du poids maximal en kg par pneumatique par la gravité. Les essais ont été effectués en utilisant un pneumatique MICHELIN ENERGY™ SAVER 195/65R15 95T dont l'indice de charge 95 indique que celui-ci peut supporter un poids maximal de 690 kg soit une charge verticale F_{zETRTO} de 6770 N environ.

3.2.2 Présentation des essais

Nous rappelons que le but de l'étude fréquentielle réalisée est de valider (ou non) le modèle de Ballant présenté dans la section 1.4.2 . Nous avons choisi d'observer les diagrammes de Bode associés à différentes configurations de facteurs d'entrée du banc d'essais.

Il s'agit seulement ici d'une étape de validation ne nécessitant pas la détermination de paramètres influents ou la création d'un modèle : nous n'avons donc pas appliqué la théorie des plans d'expériences.

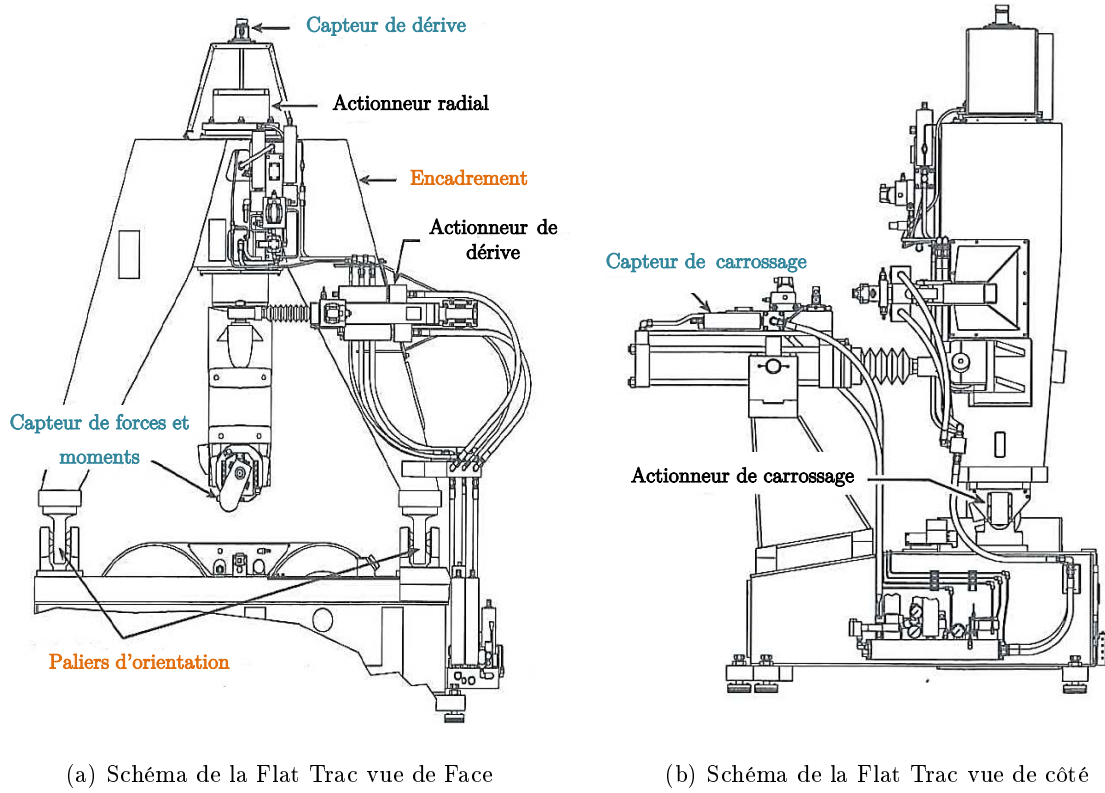


FIGURE 3.2 – Schémas de la Flat Trac

Huit configurations d'essais à dix fréquences différentes, reflétant une manœuvre dite d'urgence, ont été réalisées (*cf.* TABLE 3.1). En effet, afin de simuler des changements de file dynamiques, des sinus de dérive ont été appliqués au pneumatique à différentes fréquences. Une représentation du type de signaux observés est proposée FIGURE 3.3(a) et 3.3(b) (fréquence fixée à 1,5Hz).

La valeur de la dérive spécifiée dans la TABLE 3.1 représente l'amplitude crête à crête de ce sinus.

N°	α en °	γ en °	F_z en N	v_X en km/h	P en kPa	F en Hz
1	3	0	40%	30	180	5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1,5 ; 1 ; 0,5 ; 0,33 ; 0,18 ; 0,1
2	3	0	100%	30	180	5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1,5 ; 1 ; 0,5 ; 0,33 ; 0,18 ; 0,1
3	3	0	40%	110	180	5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1,5 ; 1 ; 0,5 ; 0,33 ; 0,18 ; 0,1
4	3	0	100%	110	180	5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1,5 ; 1 ; 0,5 ; 0,33 ; 0,18 ; 0,1
5	3	0	40%	30	340	5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1,5 ; 1 ; 0,5 ; 0,33 ; 0,18 ; 0,1
6	3	0	100%	30	340	5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1,5 ; 1 ; 0,5 ; 0,33 ; 0,18 ; 0,1
7	3	0	40%	110	340	5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1,5 ; 1 ; 0,5 ; 0,33 ; 0,18 ; 0,1
8	3	0	100%	110	340	5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1,5 ; 1 ; 0,5 ; 0,33 ; 0,18 ; 0,1

TABLE 3.1 – Essais de validation du modèle du premier ordre

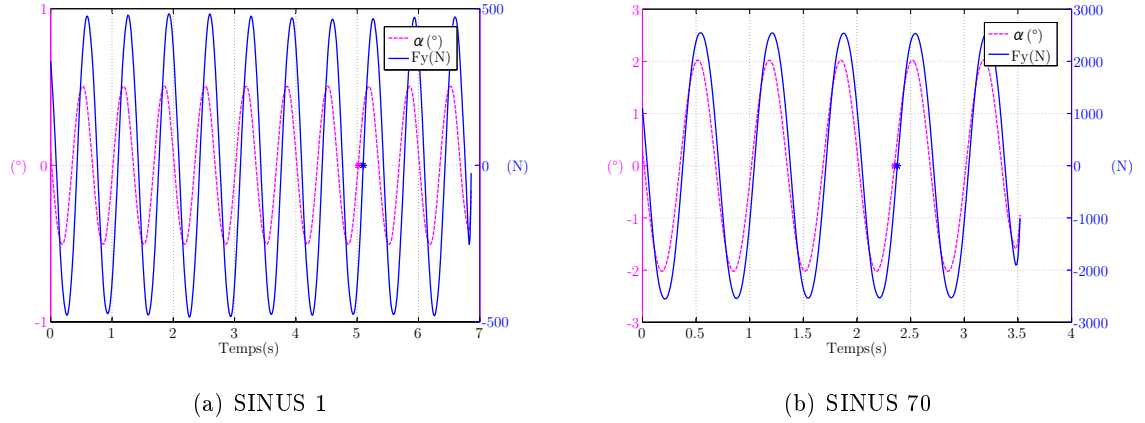


FIGURE 3.3 – Exemple de signaux observés

3.2.3 Diagramme de Bode : $F_y/\alpha = f(w)$

Sur la FIGURE 3.4 ont été représentés les diagrammes de Bode associés aux essais de la Table 3.1. Il est possible de dissocier trois « allures » de réponses fréquentielles : celles de l'essai 2 et 6, celles de l'essai 1 et 5 et celles de l'essai 3, 4, 7 et 8.

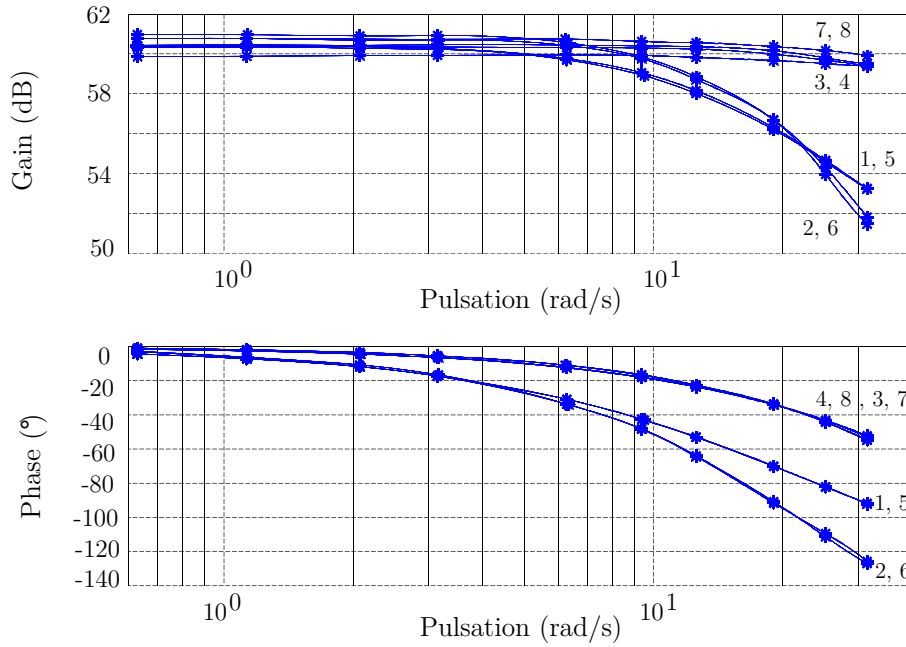


FIGURE 3.4 – Diagrammes de Bode associés aux essais effectués Table 3.1

A faible vitesse (30km/h), une variation de pression ne semble pas avoir d'influence sur la

réponse fréquentielle du pneumatique (essais 2, 6 et essais 1, 5). Au contraire, une variation de charge implique des réponses fréquentielles tout à fait différentes.

A haute vitesse (110km/h), une variation de charge ou de pression influe peu sur les réponses fréquentielles observées (essais 3, 4, 7, 8).

Si l'on reprend la fonction de transfert associée au modèle de Ballant (équation (1.33)), nous constatons que seule la vitesse longitudinale intervient comme paramètre variant. Cependant, l'analyse fréquentielle réalisée précédemment tend à montrer qu'une variation de vitesse ne permet pas à elle seule d'expliquer les variations observées.

Par ailleurs, en étudiant de plus près ces diagrammes de Bode (cf. FIGURE 3.5), en ne retenant par exemple que les réponses fréquentielles les plus éloignées, nous constatons que les réponses observées ne semblent correspondre ni à un système du premier, ni à un système du second ordre.

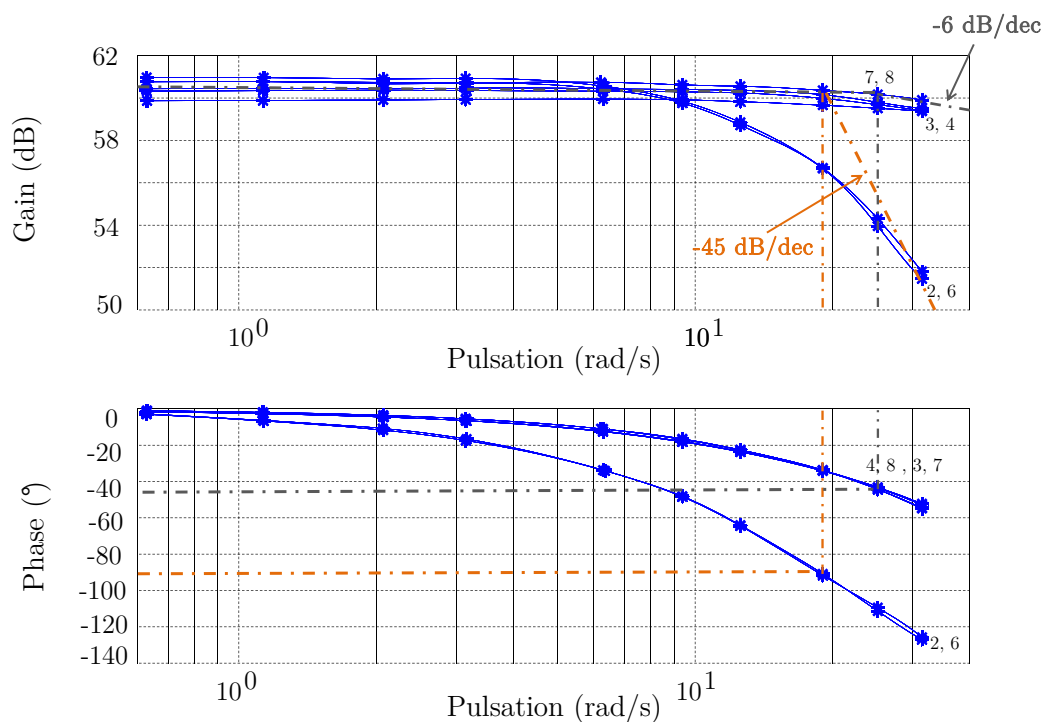


FIGURE 3.5 – Etude des asymptotes des diagrammes de Bode

En effet, si l'on admet que le diagramme de phase du groupe des essais 3, 4, 7 et 8 se rapproche de celui d'un système du premier ordre, à la pulsation de coupure w_c on devrait observer une phase de -45° . En reportant cette pulsation de coupure sur le diagramme de gain, il est possible de tracer l'asymptote à la courbe de gain lorsque la pulsation est supérieure à w_c . La pente de cette asymptote est de -6 dB/dec alors que celle d'un système du premier ordre vaut -20 dB/dec. Ces réponses ne semblent donc pas être celles d'un système du premier ordre.

De la même manière, en considérant les essais 2 et 6, le diagramme de phase de ces derniers

ressemble à celui d'un système du second ordre. Si l'on effectue les mêmes opérations que précédemment (phase de -90° à w_c), il apparaît que la pente de l'asymptote à la courbe de gain (pour des fréquences supérieures à la fréquence de coupure) vaut -45dB/dec alors qu'elle vaut -40dB/dec pour un système du second ordre.

Pour conclure, il semble que le modèle de Ballant ne semble pas être suffisamment représentatif « en l'état » de celui du comportement transitoire réel du pneumatique. En effet, le seul paramètre qui varie dans cette fonction de transfert (cf. équation (1.33)) est la vitesse, alors qu'après étude, nous nous apercevons que la charge, entre autres, doit également être prise en compte. En réalité, la rigidité de dérive et la rigidité latérale du pneumatique ne sont pas constantes. Elles varient par exemple en fonction de la charge ou de la pression ce qui peut expliquer le classement des réponses selon trois groupes. Néanmoins, ce constat ne permet pas de comprendre pourquoi dans un cas la courbe de gain ne chute pas assez (-6 dB/dec pour les essais 3, 4, 7 et 8) et dans l'autres cas, pourquoi elle chute trop vite (45dB/dec pour les essais 2 et 6).

Le fait que la rigidité de dérive et la raideur latérale dépendent aussi de la fréquence du signal de sollicitation du pneumatique permettrait d'expliquer la remarque précédente. Physiquement, cela ne semble pas aberrant étant donné la structure du pneumatique. En effet, les fils qui constituent les nappes de sommet et la nappe carcasse du pneumatique peuvent rendre celui-ci beaucoup plus rigide pour une sollicitation plus dynamique (fréquence plus importante).

Ainsi, en prenant en compte les commentaires ci-dessus, nous avons choisi d'adopter la fonction de transfert suivante afin de mettre en relief le comportement transitoire du pneumatique :

$$F_y = -\frac{D_y(\alpha, \gamma, F_z, v_X, P, F)}{1 + \frac{D_y(\alpha, \gamma, F_z, v_X, P, F)}{K_y(\alpha, \gamma, F_z, v_X, P, F)} \cdot s} \cdot \alpha_{app} \quad (3.1)$$

où $D_y(\alpha, \gamma, F_z, v_X, P, F)$ et $K_y(\alpha, \gamma, F_z, v_X, P, F)$ désignent la rigidité de dérive et la raideur latérale qui dépendent de la dérive, du carrossage, de la charge verticale, de la vitesse de roulement, de la pression et de la fréquence du signal de sollicitation.

Il s'agit d'un modèle linéaire du premier ordre à paramètres variants. La difficulté consiste à présent de définir la procédure d'identification de ces paramètres variants, sur banc Flat Trac[®] MTS.

3.2.4 Méthode d'identification des paramètres variants

On peut écrire la fonction de transfert présentée équation (3.1) sous la forme :

$$F_y = -\frac{D_y(\alpha, \gamma, F_z, v_X, P, F)}{1 + \tau(\alpha, \gamma, F_z, v_X, P, F) \cdot s} \cdot \alpha_{app} \quad (3.2)$$

où $\tau = \frac{D_y(\alpha, \gamma, F_z, v_X, P, F)}{K_y(\alpha, \gamma, F_z, v_X, P, F) \cdot v_X}$.

Le gain logarithmique de cette fonction de transfert s'écrit :

$$G = 20 \cdot \log \left(\frac{|D_y(\cdot)|}{\sqrt{1 + \tau(\cdot)^2 \cdot w^2}} \right) \quad (3.3)$$

avec G en dB.

On peut également calculer sa phase de la manière suivante :

$$\phi = \pi - \arctan(\tau(.).w) \quad (3.4)$$

car $-D_y(.) < 0$, avec ϕ en $^\circ$.

Par ailleurs,

$$\tan(\phi) = -\tan(-\arctan(\tau(.).w)) = -\tan(\arctan(-\tau(.).w)) = \tau(.).w \quad (3.5)$$

Ainsi,

$$\tan^2(\phi) = \tau(.).^2.w^2 \quad (3.6)$$

La formule du gain devient (cf. équation (3.3)) :

$$G = 20.\log\left(\frac{|D_y(.)|}{\sqrt{1 + \tan^2(\phi)}}\right) \quad (3.7)$$

Ainsi en connaissant les valeurs du gain et de la phase, le paramètre D_y pourra être calculé.

De plus, comme $\tau = \frac{D_y(.)}{K_y(.).v_X}$ et $\tan(\phi) = \tau(.).w$, avec D_y , v_X et ϕ connus, il est possible de calculer K_y .

En conclusion, à partir des valeurs du gain et de la phase, il est possible de déterminer celles des paramètres D_y et K_y . Nous rappelons qu'il s'agit de paramètres variants. Un choix judicieux des essais doit être effectué afin de représenter la variation de ces paramètres en fonction des facteurs dont ils dépendent.

La méthode des plans d'expériences a été utilisée afin de réaliser ce choix d'essais. De plus, elle a permis d'écrire un modèle d'amplification et de déphasage qui seront à la base du calcul des paramètres variants. Ainsi dans les sections suivantes, deux études vont être appliquées : une étude par plan complet et une seconde par plan fractionnaire. Une comparaison des résultats obtenus sera présentée.

3.3 Détermination des facteurs influents en vue de l'élaboration d'un modèle transitoire du pneumatique

3.3.1 Plan factoriel complet

Un plan complet a été réalisé dans un premier temps afin de « dégrossir » le problème.

Nous rappelons que pour simuler des manœuvres dynamiques telles qu'un double changement de file par exemple, des sinus de dérive ont été appliqués au pneumatique. La force latérale créée a été mesurée en sortie. Les deux grandeurs que nous avons observées sont le facteur d'amplification (en $N/^\circ$) entre le sinus de dérive de commande et la force latérale en sortie, ainsi que le déphasage (en $^\circ$) entre ces deux signaux.

Une description des facteurs à prendre en compte dans le plan d'expériences et leur domaine d'étude est proposée dans la section suivante.

3.3.1.1 Facteurs d'entrée et domaine d'étude

Les facteurs à spécifier sont les facteurs d'entrée de la Flat Trac, c'est-à-dire la dérive, le carrossage, la charge verticale, la vitesse et la pression. Les modèles d'amplification et de déphasage dépendent également de la fréquence et sont très sensibles aux variations de fréquence. Pour rendre la procédure d'identification plus précise, nous avons choisi de réaliser plusieurs fois le même plan d'expériences à plusieurs fréquences différentes (0,1 , 0,3 , 0,5 , 1 , 1,5 et 2 Hz). Dans le cas où la fréquence du signal de dérive est différente de celles fixées lors des étapes d'identification, une interpolation des valeurs des paramètres variants est faite entre les deux fréquences analysées les plus proches.

Nous présentons donc ici une des sous-procédures d'identification, où la fréquence du sinus de dérive est fixée à 1,5 Hz (représentatif d'une manœuvre très dynamique). Les valeurs prises par les différents facteurs sont présentées TABLE 3.2. Les valeurs de la dérive correspondent à l'amplitude crête à crête du sinus.

Facteur et son N°	Niveau bas (-1)	Niveau haut (+1)
Dérive (α en $^\circ$) : 1	1	4
Carrossage (γ en $^\circ$) : 2	0	5
Charge verticale (F_z en N) : 3	$40\%.F_{zETRTO}$	$100\%.F_{zETRTO}$
Vitesse de la bande de roulement (v_X en km/h) : 4	30	110
Pression (P en bar) : 5	1,8	3,4

TABLE 3.2 – Niveaux des différents facteurs

3.3.1.2 Plan d'expériences et résultats de l'expérimentation

Comme nous l'avons présenté section 2.3.1, un plan complet prend en compte l'intégralité des facteurs d'entrée (cf. TABLE 3.2).

Un plan complet à cinq facteurs à deux niveaux a donc été réalisé. Il comprend $2^5 = 32$ essais. La matrice d'expériences ainsi que les résultats de l'expérimentation sont présentés TABLE 3.3.

3.3.1.3 Modélisation

Nous rappelons que dans le cas des plans factoriels complets à deux niveaux, le modèle postulé *a priori* est un modèle polynomial qui relie la réponse y aux différents facteurs [Goupy et Creighton, 2006] :

$$y = a_0 + a_1.x_1 + a_2.x_2 + \dots + a_n.x_n + \sum_{i,j=1;i \neq j}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i,j,k=1;i \neq j \neq k}^n a_{ijk}x_i x_j x_k + \dots \quad (3.8)$$

avec x_i un niveau du facteur i , x_j un niveau du facteur j et $a_0, a_1 \dots a_n$ les coefficients du modèle.

Ainsi, le modèle postulé pour un plan complet à 5 facteurs comportant deux niveaux s'écrit :

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^5 a_i x_i + \sum_{i,j=1;i \neq j}^5 a_{ij} x_i x_j + \sum_{i,j,k=1;i \neq j \neq k}^5 a_{ijk} x_i x_j x_k + \sum_{i,j,k,l=1;i \neq j \neq k \neq l}^5 a_{ijkl} x_i x_j x_k x_l + a_{12345} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \quad (3.9)$$

N° essai	α (°) 1	γ (°) 2	F_z (N) 3	v_X (km/h) 4	P (bar) 5	amplification (N/°)	déphasage (°)
1	-	-	-	-	-	956,94	-44,05
2	+	-	-	-	-	865	-41,23
3	-	+	-	-	-	952,22	-43,74
4	+	+	-	-	-	854,11	-41,12
5	-	-	+	-	-	1026,24	-47,80
6	+	-	+	-	-	945,53	-49,07
7	-	+	+	-	-	1014,96	-47,35
8	+	+	+	-	-	946,65	-46,37
9	-	-	-	+	-	1142,93	-16,94
10	+	-	-	+	-	979,50	-18,13
11	-	+	-	+	-	1138,58	-17,69
12	+	+	-	+	-	967,52	-18,43
13	-	-	+	+	-	1033,27	-16,97
14	+	-	+	+	-	1039,65	-16,49
15	-	+	+	+	-	1164,81	-16,55
16	+	+	+	+	-	1031,21	-15,57
17	-	-	-	-	+	885,92	-28,16
18	+	-	-	-	+	750,46	-27,13
19	-	+	-	-	+	868,62	-28,74
20	+	+	-	-	+	767,46	-26,78
21	-	-	+	-	+	1399,95	-45,94
22	+	-	+	-	+	1286,72	-43,81
23	-	+	+	-	+	1357,40	-42,91
24	+	+	+	-	+	1270,83	-41,65
25	-	-	-	+	+	998,13	-12,18
26	+	-	-	+	+	828,35	-12,48
27	-	+	-	+	+	992,07	-12,68
28	+	+	-	+	+	820,20	-13,56
29	-	-	+	+	+	1645,12	-17,02
30	+	-	+	+	+	1534,85	-17,21
31	-	+	+	+	+	1606,56	-15,21
32	+	+	+	+	+	1504,58	-14,55

TABLE 3.3 – Matrice d'expériences et résultats

Afin d'obtenir un modèle simple d'amplification et de déphasage, nous avons choisi de ne conserver que les interactions d'ordre deux. Le modèle postulé devient donc :

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^5 a_i x_i + \sum_{i,j=1;i \neq j}^5 a_{ij} x_i x_j \quad (3.10)$$

Il comporte seize coefficients qui correspondent aux effets des différents facteurs ou interactions (*cf.* section 2.3.1.3).

Comme nous avons choisi de ne pas prendre en compte toutes les interactions, la matrice X du modèle, non carrée, n'est pas une matrice d'Hadamard (cf. TABLE 3.4). Ainsi, pour calculer les effets, il faut résoudre (cf. section 2.5.2) :

$$E = ({}^tXX)^{-1}{}^tXY \quad (3.11)$$

M	1	2	3	4	5	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45
+1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
+1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1
+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1
+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
+1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1
+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	+1
+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1
+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1
+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1
+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1
+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1
+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1
+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1
+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1
+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1
+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1
+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1
+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1
+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1
+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1
+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1
+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1
+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	+1
+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1
+1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1
+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1
+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

TABLE 3.4 – Matrice X du modèle

Les valeurs obtenues, en utilisant le logiciel Minitab[®], des coefficients du modèle désigné, sont présentées Table 3.5.

Facteur	amplification			déphasage		
	Coefficient	Valeur de t	Valeur de p	Coefficient	Valeur de t	Valeur de p
Constante	1080,51	129,54	0	-28,05	-120,92	0
$\alpha : 1$	-55,97	-6,71	0	0,32	1,39	0,18
$\gamma : 2$	-1,90	-0,23	0,82	0,37	1,58	0,13
$F_z : 3$	157,51	18,88	0	-2,86	-12,32	0
$v_X : 4$	71,20	8,54	0	12,32	53,11	0
$P : 5$	76,82	9,21	0	3,05	13,13	0
12	-2,32	-0,28	0,79	0,10	0,45	0,66
13	12,95	1,55	0,14	-0,01	-0,04	0,97
14	-7,50	-0,9	0,38	-0,40	-1,71	0,11
15	-5,92	-0,71	0,49	0,03	0,13	0,90
23	1,00	0,12	0,90	0,52	2,24	0,04
24	3,38	0,41	0,69	-0,17	-0,72	0,48
25	-6,96	-0,83	0,42	0,13	0,54	0,60
34	10,79	1,29	0,21	2,40	10,3	0
35	135,91	16,29	0	-1,93	-8,32	0
45	12,71	1,52	0,15	-1,68	-7,24	0

TABLE 3.5 – Tableau des effets des facteurs et interactions

Ainsi, les modèles d'amplification et de phase s'écrivent (unités non codées) :

$$\begin{aligned}
 \text{amplification} = & 1080,51 - 55,97.x_1 - 1,90.x_2 + 157,51.x_3 + 71,20.x_4 + 76,82.x_5 \\
 & - 2,32.x_1.x_2 + 12,95.x_1.x_3 - 7,50.x_1.x_4 - 5,92.x_1.x_5 \\
 & + 1,00.x_2.x_3 + 3,38.x_2.x_4 - 6,96.x_2.x_5 \\
 & + 10,79.x_3.x_4 + 135,91.x_3.x_5 \\
 & + 12,71.x_4.x_5
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 \text{déphasage} = & - 28,05 + 0,32.x_1 + 0,37.x_2 - 2,86.x_3 + 12,32.x_4 + 3,05.x_5 \\
 & + 0,10.x_1.x_2 - 0,01.x_1.x_3 - 0,40.x_1.x_4 + 0,03.x_1.x_5 \\
 & + 0,52.x_2.x_3 - 0,17.x_2.x_4 + 0,13.x_2.x_5 \\
 & + 2,40.x_3.x_4 - 1,93.x_3.x_5 \\
 & - 1,68.x_4.x_5
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.3.2 Analyse du modèle obtenu avec le plan complet

3.3.2.1 Analyse statistique du modèle

Test de Student

Dans la TABLE 3.5 nous trouvons la valeur de t associée au test de Student (cf. section 2.3.3.3 et annexe A.3).

On a $N = n - p = 32 - 16 = 16$, ainsi $t_{crit}(0,05, 16) = 2,1199 \simeq 2,12$.

Rappel :

Si $|t_i| > t_{crit}(0,05, 16)$, on rejette H_0 (facteur significatif) au risque α ;

Si $|t_i| < t_{crit}(0,05, 16)$, on accepte H_0 (facteur non influent) au risque α .

Ainsi, la dérive, la charge verticale, la vitesse de roulement, la pression et l'interaction entre la charge verticale et la pression ont un effet significatif sur l'amplification.

De même, la charge verticale, la vitesse de roulement, la pression, et l'interaction entre la charge verticale et le carrossage ou la vitesse de roulement ou la pression, et entre la vitesse de roulement et la pression, ont un effet significatif sur le déphasage.

On retrouve cette même conclusion lorsque l'on étudie la valeur de p (cf. section 2.3.4.4).

Analyse de la variance

Le tableau d'analyse de la variance est présenté Table 3.6. Les sommes des carrés et les carrés moyens calculés par le logiciel Minitab[®] sont ajustées(és).

En effet, les sommes des carrés ajustées ne dépendent pas de l'ordre dans lequel les facteurs sont entrés dans le modèle. Il s'agit de la seule partie de la somme des carrés de la régression expliquée par un facteur, en fonction de tous les autres facteurs du modèle, indépendamment de l'ordre dans lequel ils ont été entrés dans celui-ci.

Par exemple, dans le cas d'un modèle possédant trois facteurs $X1$, $X2$, et $X3$, la somme des carrés ajustée pour $X2$ indique la proportion de la variation restante expliquée par $X2$, du fait que $X1$ et $X3$ figurent également dans le modèle.

En utilisant ce même exemple, la somme des carrés ajustée pour $X2$ est égale à :

$$SSR(X3|X1, X2) = SSE(X1, X2) - SSE(X1, X2, X3) \quad (3.14)$$

et,

$$SSR(X3|X1, X2) = SSR(X1, X2, X3) - SSR(X1, X2) \quad (3.15)$$

où $SSR(X3|X1, X2)$ est la somme des carrés ajustée pour $X3$, du fait que $X1$ et $X2$ figurent également dans le modèle.

De la même manière :

$$SSR(X2, X3|X1) = SSE(X1) - SSE(X1, X2, X3) \quad (3.16)$$

et,

$$SSR(X2, X3|X1) = SSR(X1, X2, X3) - SSR(X1) \quad (3.17)$$

		amplification			déphasage		
Source de variation	DL	SS aj.	MS aj.	F	SS aj.	MS aj.	F
Modèle	15	1855739	123716	55,57	5829,21	388,61	225,73
Linéaire	5	1245299	249060	111,86	5421,68	1084,34	629,86
$\alpha : 1$	1	100251	100251	45,03	3,35	3,35	1,94
$\gamma : 2$	1	115	115	0,05	4,29	4,29	2,49
$F_z : 3$	1	793901	793901	356,57	261,23	261,23	151,74
$v_X : 4$	1	162211	162211	72,85	4855,80	4855,80	2820,59
$P : 5$	1	188820	188820	84,81	297,01	297,01	172,52
Interaction	10	610441	61044	27,42	407,53	40,75	23,67
Interaction 12	1	172	172	0,08	0,35	0,35	0,20
Interaction 13	1	5370	5370	2,41	0,00	0,00	0,00
Interaction 14	1	1802	1802	0,81	5,05	5,05	2,93
Interaction 15	1	1123	1123	0,50	0,03	0,03	0,02
Interaction 23	1	32	32	0,01	8,60	8,60	5,00
Interaction 24	1	366	366	0,16	0,89	0,89	0,52
Interaction 25	1	1551	1551	0,70	0,50	0,50	0,29
Interaction 34	1	3724	3724	1,67	182,74	182,74	106,15
Interaction 35	1	591132	591132	265,50	119,16	119,16	69,22
Interaction 45	1	5168	5168	2,32	90,22	90,22	52,40
Erreur	16	35624	2227		27,54	1,72	
Total	31	1891363			5856,76		

TABLE 3.6 – Tableau de l'analyse de la variance

où $SSR(X2, X3|X1)$ est la somme des carrés ajustée pour $X2$ et $X3$, du fait que $X1$ figure également dans le modèle.

Afin de dissocier les facteurs influents des facteurs non influents, nous pouvons calculer pour chaque facteur/interaction, le facteur F de Fisher. Nous rappelons que $F_{facteur/interaction} = MSR/MSE$. La règle de décision du test de Fisher est, par ailleurs, énoncée section 2.3.3.2.

Nous avons $f_{\alpha, \nu_1, \nu_2} = f_{0,05, 1, 16} = 4,49$ (cf. annexe A.2). Ainsi, si $F_{facteur/interaction} \geq 4,49$, le facteur/interaction est influent(e). Nous retrouvons les facteurs influents énoncés précédemment.

Nous allons à présent procéder à l'analyse graphique du modèle.

3.3.2.2 Analyse graphique du modèle

Graphique des effets moyens

Nous avons représenté FIGURE 3.6 et FIGURE 3.7, les graphiques des effets moyens sur l'amplification et sur le déphasage.

Le facteur 3 apparaît comme le facteur le plus influent sur l'amplification : en effet, la variation entre la moyenne de gain associée au niveau haut et celle au niveau bas du facteur est la plus importante. Au contraire, le facteur 2 semble être le moins influent. De plus, en suivant le même raisonnement, le facteur 4 apparaît comme le facteur le plus influent sur le déphasage et le facteur 1 comme le moins influent.

Ces résultats confirment bien les calculs des effets effectués dans la section précédente.

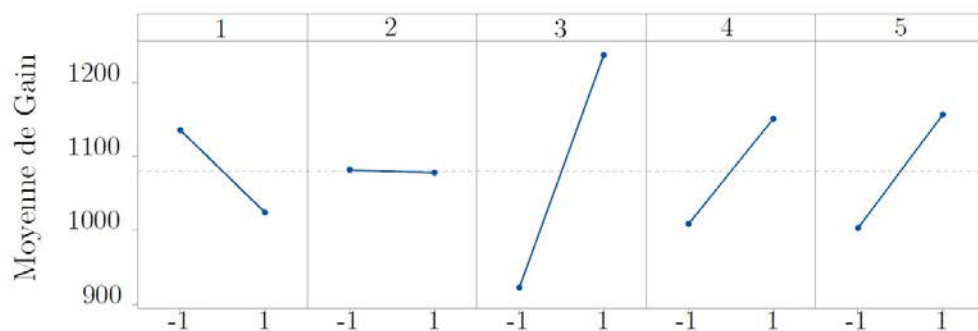


FIGURE 3.6 – Graphique des effets moyens sur l'amplification

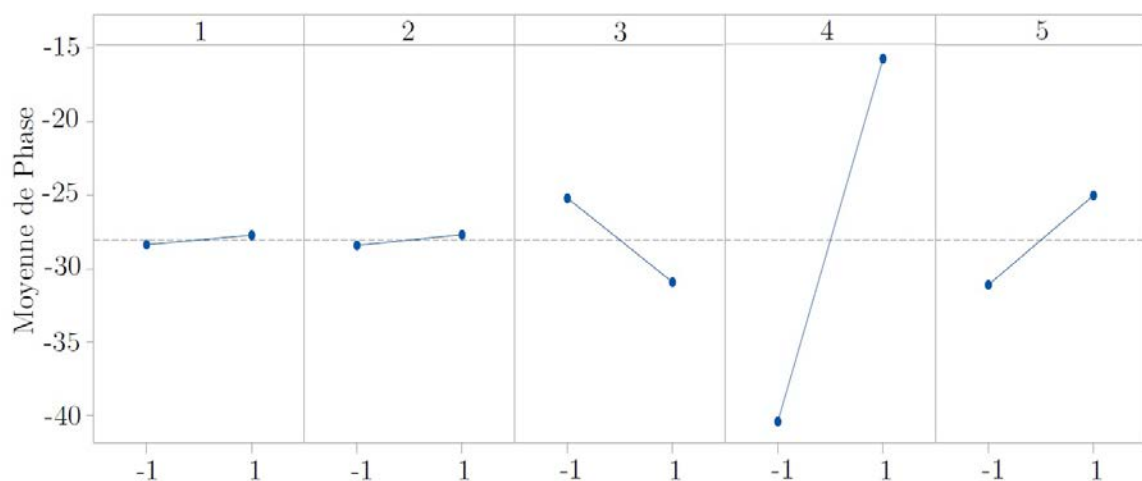


FIGURE 3.7 – Graphique des effets moyens sur le déphasage

Diagramme des interactions

En utilisant la présentation de ces diagrammes section 2.3.4.2, nous pouvons affirmer que l'interaction entre le facteur 3 et le facteur 5 est très influente sur l'amplification (droites non parallèles), contrairement à celle entre le facteur 1 et le facteur 2 par exemple (cf. FIGURE 3.8). De plus, l'interaction entre le facteur 3 et le facteur 4 semble être la plus influente sur le déphasage, contrairement à l'interaction entre le facteur 1 et le facteur 3 qui peut être négligée (cf. FIGURE 3.9).

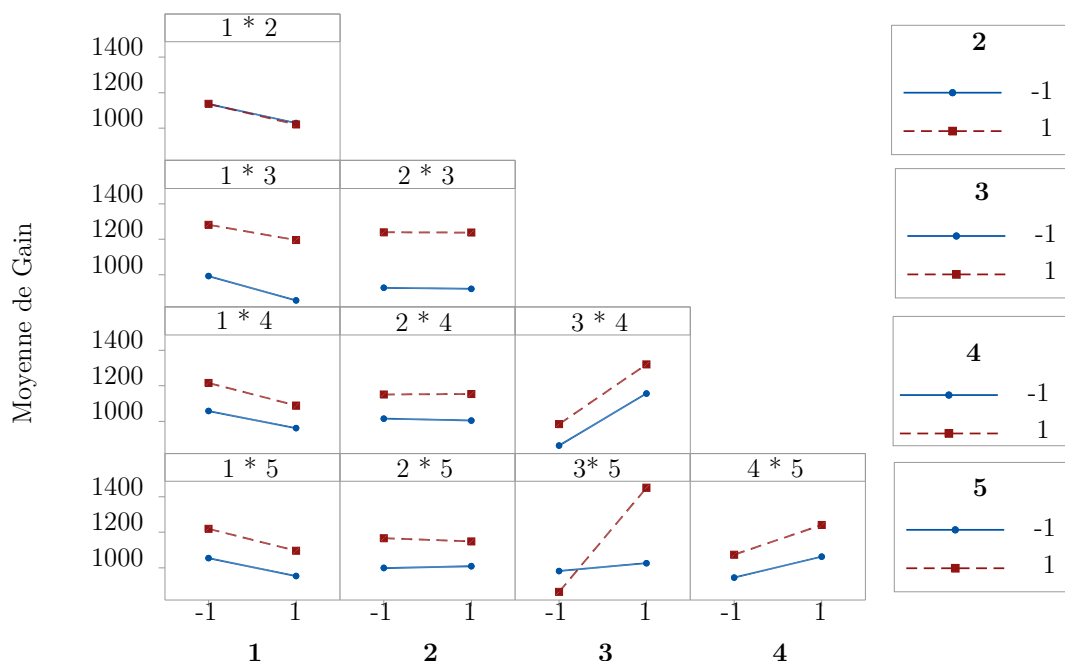


FIGURE 3.8 – Graphique des interactions sur l'amplification

Diagramme de Pareto

Comme il existe un terme d'erreur dans le modèle d'amplification et de déphasage, en abscisse des diagrammes de Pareto FIGURES 3.10 et 3.11, on trouve la valeur absolue de l'effet normalisé (cf. section 2.3.4.3).

Par ailleurs, la valeur associée à la droite verticale séparant les facteurs influents des facteurs non significatifs est $t_{1-\alpha/2}$, le quantile d'ordre $(1 - \alpha/2)$ de la loi de Student à seize degrés de liberté. D'après l'annexe A.3, cette valeur vaut environ 2,12 lorsque α est égal à 0,05. On retrouve les mêmes conclusions sur les facteurs influents que précédemment.

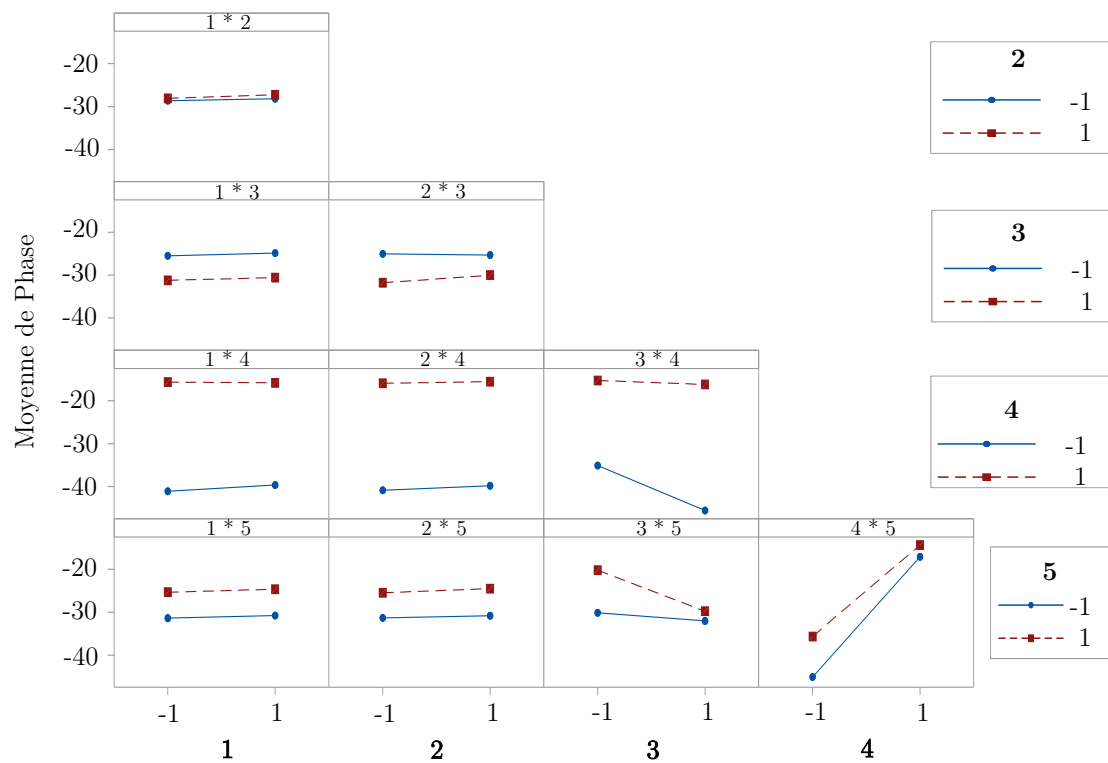


FIGURE 3.9 – Graphique des interactions sur le déphasage

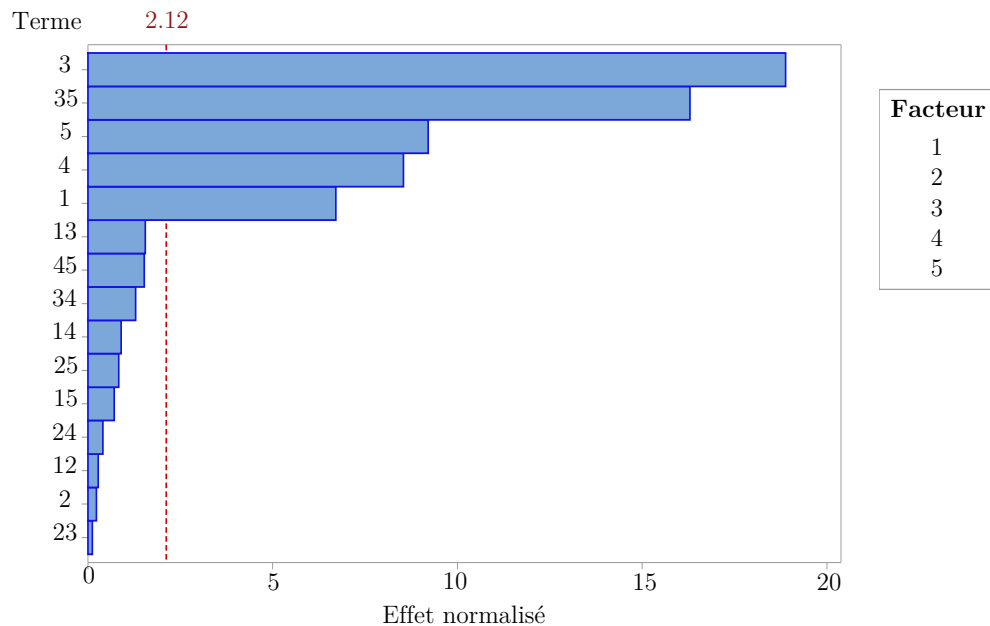


FIGURE 3.10 – Diagramme de Pareto des effets normalisés sur le Gain ($\alpha = 0.05$)

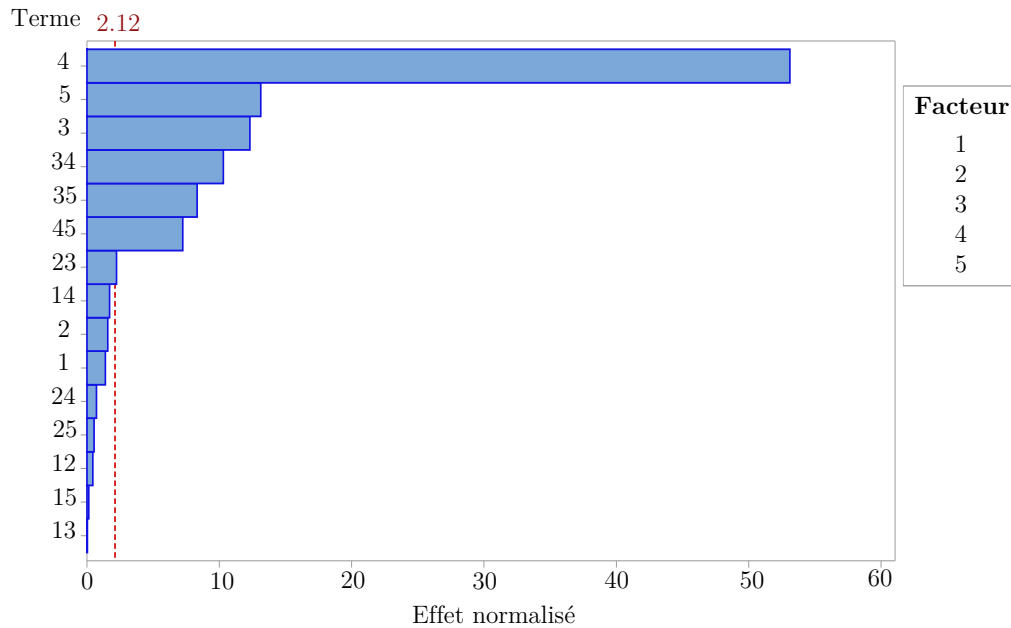


FIGURE 3.11 – Diagramme de Pareto des effets normalisés sur la Phase ($\alpha = 0.05$)

Diagramme de Daniel

Comme pour le diagramme de Pareto, on observe en abscisse des diagrammes de Daniel FIGURE 3.12 et FIGURE 3.13 la valeur de l'effet normalisé absolu des facteurs/interactions. Plus les facteurs sont éloignés de la droite de Henry (représentation de la fréquence cumulée d'une distribution normale : cf. section 2.3.4.4), plus ils sont significatifs. Le classement des facteurs selon leur influences à partir des courbes d'amplification et de phase, confirme celui énoncé dans les sections précédentes.

En résumé, les plans factoriels complets qui ont été présentés nous ont permis de déterminer les paramètres influents sur les courbes d'amplification et de phase de la fonction de transfert F_y/α . Nous avons fait le choix de limiter l'étude à des interactions d'ordre deux entre les facteurs afin de répondre à la contrainte de modélisation peu complexe. Le plan complet s'avère donc trop riche en essais car nous avons réalisé 32 essais alors que nous avons seulement 16 coefficients à déterminer.

Nous allons donc proposer, dans la section suivante, un plan d'expériences comportant moins d'essais, qui sera une fraction du plan complet.

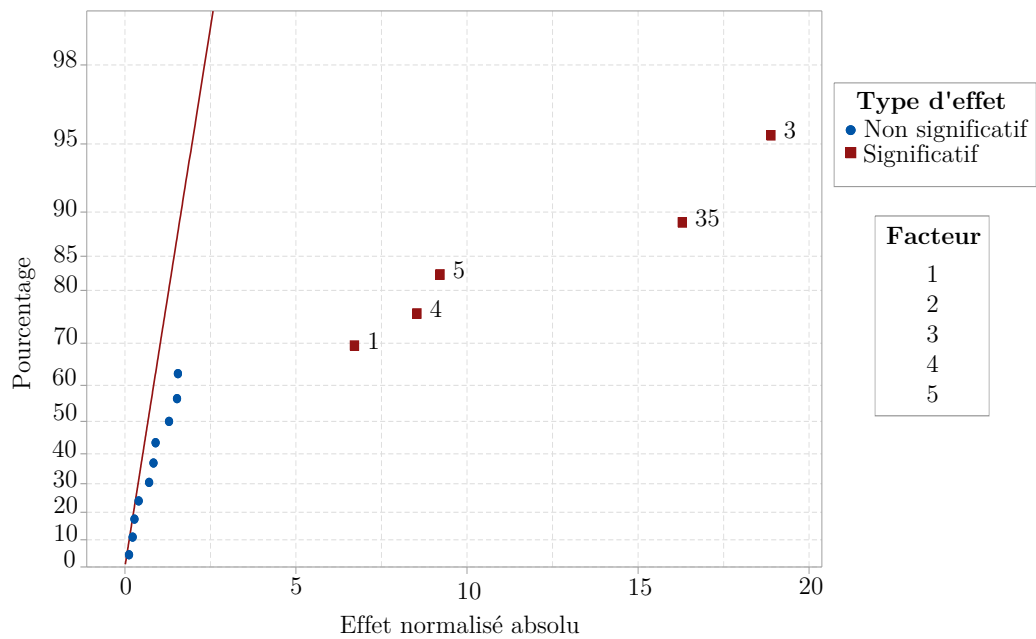


FIGURE 3.12 – Demi-droite de Henry des effets normalisés sur le Gain ($\alpha = 0.05$)

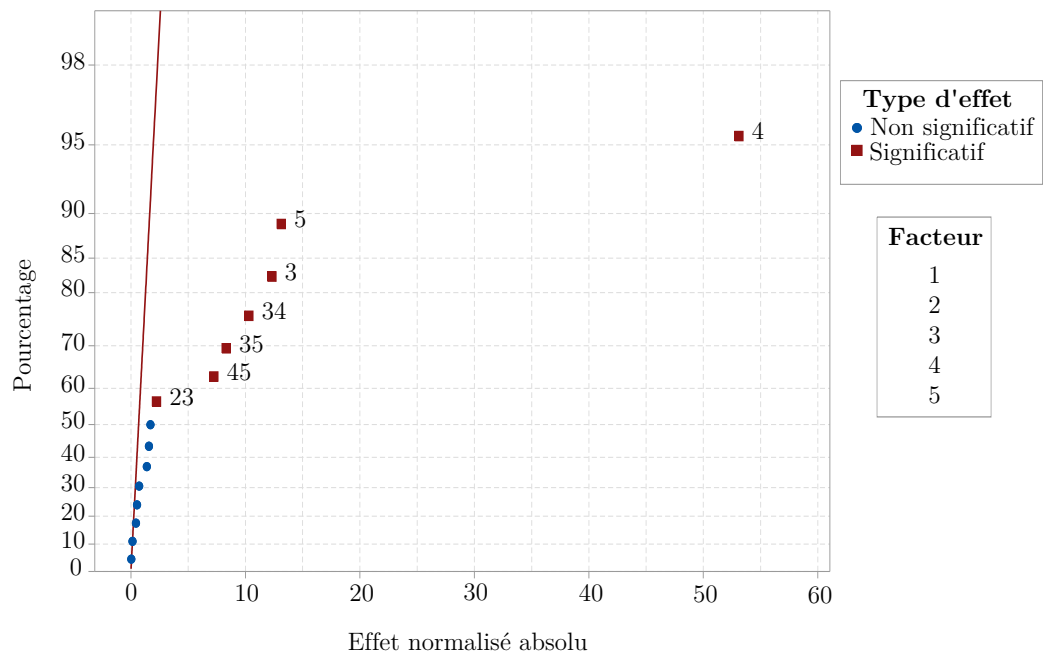


FIGURE 3.13 – Demi-droite de Henry des effets normalisés sur la Phase ($\alpha = 0.05$)

3.3.3 Plan factoriel fractionnaire

Nous rappelons que l'objectif de notre étude est d'obtenir un modèle simple (interaction d'ordre deux maximum) afin de représenter plus finement les courbes d'amplification et de phase de la fonction de transfert F_y/α .

Dans la section 2.3.2.3, la notion de résolution des plans fractionnaires a été développée. Étant donné le type de modèle choisi, le plan fractionnaire que nous allons réaliser doit être au minimum de résolution IV afin que les effets principaux ne soient pas confondus avec des interactions de rang égal ou supérieur à 2. Nous choisissons ainsi un plan à seize essais (plan 2^{5-1}) qui est de résolution V (cf. TABLE 2.3).

La présentation des facteurs et du domaine d'étude est semblable à celle effectuée dans le cadre des plans complets.

3.3.3.1 Plan d'expériences et résultats de l'expérimentation

Un plan 2^{5-1} , qui comporte donc la moitié des essais du plan 2^5 , a été réalisé. Les étapes de sa construction sont développées ci-dessous (cf. section 2.3.2.1).

Étape 1 : Choix d'un plan de base à $2^4 = 16$ essais.

Étape 2 : Construction de la matrice des effets du modèle saturé avec ce plan de base (cf. TABLE 3.7).

Étape 3 : Confondre le facteur restant avec l'interaction du plus haut degré du plan de base. On va ainsi confondre le facteur 5 avec l'interaction 1234.

N° essai	I	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	1234
1	+	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+
2	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
3	+	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-
4	+	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	+	+	+
5	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-
6	+	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	+	+
7	+	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+
8	+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-
9	+	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-
10	+	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+
11	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+
12	+	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	-	-	-
13	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+
14	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-
15	+	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	-
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

TABLE 3.7 – Matrice X du modèle associé au plan 2^4

Nous rappelons que les deux grandeurs que nous avons observées sont le facteur d'amplification (en $N/^\circ$) entre le sinus de dérive de commande et la force latérale en sortie, ainsi que le déphasage (en $^\circ$) entre ces deux signaux.

La matrice d'expérience du plan 2^{5-1} ainsi que les grandeurs mesurées sont donc les suivants :

N° essai	α (°)	γ (°)	F_z (N)	v_X (km/h)	P (bar)	amplification (N/°)	déphasage (°)
1	1	2	3	4	5		
1	-	-	-	-	+	883,15	-26,87
2	+	-	-	-	-	862,41	-40,30
3	-	+	-	-	-	953,70	-44,90
4	+	+	-	-	+	769,12	-27,40
5	-	-	+	-	-	1029,54	-45,98
6	+	-	+	-	+	1284,58	-40,62
7	-	+	+	-	+	1359,10	-44,37
8	+	+	+	-	-	948,40	-47,67
9	-	-	-	+	-	1147,25	-17,51
10	+	-	-	+	+	826,41	-11,79
11	-	+	-	+	+	989,84	-12,42
12	+	+	-	+	-	969,14	-17,85
13	-	-	+	+	+	1650,26	-18,10
14	+	-	+	+	-	1043,87	-16,85
15	-	+	+	+	-	1173,12	-15,49
16	+	+	+	+	+	1512,61	-15,85

TABLE 3.8 – Matrice d'expériences du plan 2^{5-1}

3.3.3.2 Modélisation

Comme nous l'avons montré dans la section 2.3.2.2, le calcul des effets dans le cas des plans fractionnaires est plus fastidieux que dans les cas des plans complets. Définissons à présent le générateur d'alias qui va nous permettre de déterminer la manière dont les coefficients sont aliasés dans les contrastes.

Le facteur 5 à été confondu avec l'interaction 1234, on peut donc écrire [Box et Behnken, 1960] :

$$5 = 1234 \quad (3.18)$$

soit :

$$5.5 = 1234.5 \quad (3.19)$$

c'est-à-dire,

$$I = 12345 \quad (3.20)$$

Le générateur d'alias est donc $I = 12345$.

De la même manière, nous pouvons déterminer les autres confusions :

$$\begin{cases} 1 = 2345 ; 2 = 1345 ; 3 = 1245 ; 4 = 1235 ; 5 = 1234 ; \\ 12 = 345 ; 13 = 245 ; 14 = 235 ; 15 = 234 ; 23 = 145 ; 24 = 135 ; 25 = 134 ; 34 = 125 ; 35 = 124 ; 45 = 123 \end{cases}$$

Comme nous avons choisi de négliger les interactions d'ordre supérieur à deux, les facteurs et interactions d'ordre deux ne sont confondus avec aucun(ne) facteur/interaction. Par ailleurs, la matrice X du modèle est une matrice d'Hadamard (cf. section 2.3.1.2), ainsi la matrice des effets s'écrit :

$$E = \frac{1}{16} \cdot {}^t X.Y \quad (3.21)$$

Et nous obtenons les modèles suivants estimant les courbes d'amplification et de déphasage (unités non codées) :

$$\begin{aligned} \text{amplification} = & 1088 - 60,59.x_1 - 3,28.x_2 + 162,5.x_3 + 76,41.x_4 + 71,73.x_5 \\ & + 26,03.x_1.x_2 + 7,77.x_1.x_3 - 15,47.x_1.x_4 - 0,62.x_1.x_5 \\ & + 1,40.x_2.x_3 - 0,39.x_2.x_4 + 1,56.x_2.x_5 \\ & + 18,37.x_3.x_4 + 129,7.x_3.x_5 \\ & + 8,99.x_4.x_5 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \text{déphasage} = & - 27,75 + 0,46.x_1 - 0,50.x_2 - 2,87.x_3 + 12,02.x_4 + 3,07.x_5 \\ & + 0,59.x_1.x_2 - 0,09.x_1.x_3 - 0,31.x_1.x_4 + 0,31.x_1.x_5 \\ & + 0,27.x_2.x_3 + 0,83.x_2.x_4 + 0,16.x_2.x_5 \\ & + 2,03.x_3.x_4 - 2,19.x_3.x_5 \\ & - 1,88.x_4.x_5 \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.3.4 Analyse du modèle obtenu avec le plan fractionnaire

Ce plan composé de seize essais a permis d'estimer les seize coefficients des deux modèles. Le nombre de degrés de liberté de l'erreur ($n - p$, avec n le nombre d'essais et p le nombre de coefficients) est alors nul. Il est donc impossible d'effectuer le test de Student (cf. section 2.3.3.3) et de calculer la statistique p associée à ce test. Par ailleurs, le calcul du critère F de Fisher (cf. section 2.3.3.2) est également impossible.

Pour étudier la significativité des facteurs, nous allons calculer la marge d'erreur (cf. section 2.3.3.1). Nous rappelons que la marge d'erreur est égale à $t.PSE$, où PSE est la pseudo-erreur type et t correspond au quantile $(1 - \alpha/2)$ d'une distribution de Student à (Nombre d'effets/3) degrés de liberté.

Dans le cas de l'étude du modèle d'amplification, la pseudo-erreur type de Lenth vaut 16,56, et $t(\alpha, 5)=2,57$. Ainsi, $ME \simeq 42,6$ et tout effet dont la valeur absolue est supérieure à ME, est considéré comme influent sur l'amplification.

De plus, en ce qui concerne l'étude du modèle de déphasage, la pseudo-erreur type de Lenth vaut 1,42, et $t(\alpha, 5)=2,57$. Ainsi, $ME \simeq 3,67$ et tout effet dont la valeur absolue est supérieure à ME est considéré comme influent sur le déphasage.

Les facteurs qui ont un effet significatif sur l'amplification sont donc : la dérive, la charge verticale, la vitesse de roulement, la pression, l'interaction dérive/carrossage et l'interaction charge verticale/pression.

De même, les facteurs qui ont un effet significatif sur le déphasage sont : la charge verticale, la vitesse de roulement, la pression, l'interaction charge verticale/pression, l'interaction charge verticale/vitesse de roulement et l'interaction vitesse de roulement/pression.

Remarque :

Si l'on compare les facteurs significatifs obtenus par le plan complet et ceux obtenus via le plan fractionnaire, nous constatons, tout d'abord, que le modèle d'amplification comporte un facteur influent supplémentaire, l'interaction dérive/carrossage, lorsqu'un plan fractionnaire est utilisé. Or, le carrossage n'est pas un facteur influent sur l'amplification et la valeur de l'effet associé à l'interaction dérive/carrossage ($2 \cdot \text{coefficient} = 2 \cdot 26,03 = 52,06$) est très proche de celle de la marge d'erreur (contrairement aux autres facteurs influents). Le fait de négliger cette interaction semble donc appropriée.

Ce raisonnement peut également être appliqué au facteur influent supplémentaire, l'interaction charge verticale/carrossage, du modèle de déphasage obtenu par plan complet. Les modèles simplifiés d'amplification et de déphasage sont présentés à la TABLE 3.9.

Pour conclure, le plan fractionnaire présenté apporte des résultats semblables à ceux obtenus avec un plan complet, et ce, en effectuant deux fois moins d'essais. Il semble donc intéressant, selon le modèle postulé choisi, de se tourner vers un plan fractionnaire qui répondra aux contraintes de modélisation.

3.4 Test d'ajustement des modèles obtenus

Afin de tester l'ajustement du modèle (*cf.* TABLE 3.9), nous allons calculer, pour les deux plans de criblage, le coefficient de corrélation linéaire multiple (*cf.* section 2.4.2). Les modèles testés ne comportent que les paramètres influents. Ainsi la valeur du coefficient (ou effet) associé à chaque facteur ou interaction de facteurs a été recalculé.

	Type de plan	Modèle	R^2	R^2 ajusté
amplification	Complet	$y = 1080,51 - 55,97.x_1 + 157,51.x_3 + 71,20.x_4 + 76,82.x_5 + 135,91.x_3.x_5$	97,09%	96,53%
	Fractionnaire	$y = 1087,7 - 60,6.x_1 + 162,5.x_3 + 76,4.x_4 + 71,7.x_5 + 129,2.x_3.x_5$	97,62%	96,43%
déphasage	Complet	$y = -28,047 - 2,857.x_3 + 12,318.x_4 + 3,047.x_5 + 2,390.x_3.x_4 - 1,930.x_3.x_5 - 1,679.x_4.x_5$	99,14%	98,93%
	Fractionnaire	$y = -27,748 - 2,868.x_3 + 12,016.x_4 + 3,071.x_5 + 2,028.x_3.x_4 - 2,189.x_3.x_5 - 1,878.x_4.x_5$	98,99%	98,31%

TABLE 3.9 – Test d'ajustement des modèles

Les modèles obtenus, quel que soit le type de plan utilisé, sont bien ajustés car le coefficient de

corrélation linéaire multiple et le coefficient de corrélation linéaire multiple ajusté sont supérieurs à 95%. Les valeurs de R^2 sont très proches dans les deux cas (plan complet et fractionnaire) et cela pour les deux modèles. Ce constat valide le fait qu'un plan fractionnaire soit parfaitement approprié à notre étude.

3.5 Conclusion

Le modèle de Ballant utilisé chez Renault ne permet pas d'expliquer précisément le comportement transitoire du pneumatique. L'insertion de paramètres variants dans ce modèle améliore considérablement sa capacité à estimer le phénomène étudié.

Le modèle de Ballant amélioré est un modèle du premier ordre. Aussi, à partir des valeurs du gain et de la phase de la fonction de transfert du modèle, il est possible de déterminer celles des paramètres variants, c'est-à-dire de la rigidité de dérive et de la raideur latérale.

La procédure d'identification de ces paramètres sur banc Flat Trac[®] MTS doit, par ailleurs, contenir un choix judicieux d'essais afin de représenter, le plus fidèlement possible, la variation de ces paramètres en fonction des facteurs dont ils dépendent. Pour cela, cette procédure utilise la méthode des plans d'expériences. En réalité, la procédure globale d'identification contient n sous-procédures à n fréquences différentes, afin de garantir une bonne précision des paramètres variants en fonction de la fréquence. Dans le cas où la fréquence du signal de dérive est différente des fréquences fixées lors des n sous-procédures d'identification, une interpolation des valeurs des paramètres variants est effectuée grâce à celles obtenues avec les deux fréquences analysées les plus proches.

Nous avons ainsi présenté une des sous-procédures expérimentales d'identification, à une fréquence de 1,5 Hz. Par le biais d'un plan fractionnaire, nous sommes parvenus à diminuer le nombre d'essais contenus dans celle-ci, tout en préservant le maximum d'informations sur les données étudiées. Ce sont les modèles d'amplification et de déphasage obtenus via les plans d'expériences qui permettent de calculer les paramètres variants.

Validation du modèle dynamique de pneumatique à paramètres variants

Sommaire

4.1	Introduction	90
4.2	Modèle simplifié de véhicule complet	90
4.2.1	Présentation du modèle	90
4.2.2	Définition des variables	91
4.2.3	Présentation du sous-modèle de direction	94
4.2.4	Présentation du sous-modèle de caisse	95
4.2.5	Présentation du sous-modèle de suspension	99
4.2.6	Présentation du sous-modèle de roues	104
4.3	Présentation des essais	107
4.3.1	Moyens d'essais	107
4.3.2	Manœuvres effectuées	109
4.4	Deux étapes de validation du modèle	110
4.4.1	Validation directe	110
4.4.2	Validation du modèle PV couplé au modèle simplifié de véhicule	119
4.5	Conclusion	127

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, la méthode d'identification des paramètres variants du modèle de Ballant modifié a été développée (ou plus simplement modèle PV pour paramètres variants). Il convient à présent de valider ce modèle. Pour cela, des essais réels sur piste sont utilisés ainsi qu'un modèle de dynamique automobile intégrant ce modèle, afin de valider le comportement global du véhicule.

Dans ce chapitre, une présentation du modèle de véhicule simplifié mis en œuvre (intégrant les sous-modèles de direction, de caisse, de suspensions et de roues), ainsi que des moyens d'essais et des manœuvres effectuées, est proposée. Elle est suivie de l'étape de validation, composée de deux sous-parties :

- une validation dite directe qui permet d'étudier les estimations brutes (sans couplage avec d'autres modèles) du modèle dynamique de pneumatique ;
- une validation du modèle dynamique de pneumatique couplé au modèle de véhicule mis en œuvre.

4.2 Modèle simplifié de véhicule complet

4.2.1 Présentation du modèle

Le modèle simplifié étudié se nomme Chassis AVP. Il s'agit d'un modèle utilisé en Avant Projet chez Renault. Il se compose de cinq corps rigides (*cf.* FIGURE 4.1) [Arnoux, 2008] :

- la masse suspendue de la caisse et du système de suspension ;
- les masses non suspendues qui comprennent l'ensemble des masses en mouvement.

Les suspensions et les pneumatiques sont modélisés sous forme d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle.

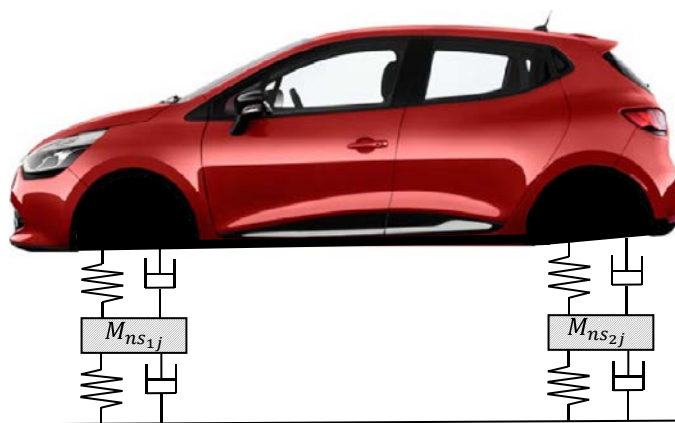


FIGURE 4.1 – Schéma du modèle simplifié utilisé (1)

Ce modèle comporte 14 degrés de liberté qui sont les suivants :

- les six degrés de liberté de la caisse ($x, y, z, \theta, \varphi, \psi$) définis plus précisément dans la section suivante ;
- un degré de liberté vertical ($z_{M_{nsij}}$) par masse non suspendue ;

- un degré de liberté de rotation des roues (enroulement : ω_{ij}).

où i désigne le train ($i = 1$ pour le train avant et $i = 2$ pour le train arrière) et j le côté du véhicule ($j = 1$ pour le côté gauche et $j = 2$ pour le côté droit).

4.2.2 Définition des variables

4.2.2.1 Repères de référence

Les repères et les notations utilisés sont ceux définis dans la norme ISO 8855 de 2011 [ISO, 2011].

Les repères de référence sont les suivants (cf. FIGURE 4.2) :

- **Le repère sol R_E** : il s'agit du trièdre orthogonal direct (X_E, Y_E, Z_E) lié à la surface de la terre, tel que X_E et Y_E définissent le plan horizontal du sol et l'axe Z_E est dirigé vers le haut. Dans ce référentiel, la position du véhicule est repérée grâce au repère intermédiaire R_I .
- **Le repère intermédiaire R_I** : il s'agit du trièdre orthogonal direct (X, Y, Z) dont le plan XY coïncide avec le plan $X_E Y_E$. L'axe X est défini par l'intersection du plan de symétrie longitudinal du véhicule au repos et du sol. L'axe Z est dirigé vers le haut et passe par le centre de gravité G_V du véhicule. Le repère intermédiaire est déduit au repos du repère sol par l'angle de lacet ψ autour de l'axe Z_E . Ce repère permet de positionner le véhicule dans le repère sol.
- **Le repère véhicule R_V** : il s'agit du trièdre orthogonal direct lié à un point du véhicule (généralement G_V), tel que l'axe X_V soit horizontal et dirigé vers l'avant dans le plan longitudinal de symétrie du véhicule, l'axe Y_V soit perpendiculaire au plan longitudinal de symétrie et dirigé vers la gauche du conducteur et l'axe Z_V soit dirigé vers le haut. Ce repère est obtenu à partir du repère intermédiaire, en appliquant les angles de tangage θ et de roulis φ (cf. section suivante).
- **Le repère roue R_W** : il s'agit du trièdre orthogonal direct dans lequel le plan $X_W Y_W$ coïncide avec le plan $X_E Y_E$. L'axe X_W est défini par l'intersection du plan de la roue et du plan $X_E Y_E$ (positif vers l'avant), l'origine est situé au point de contact au sol et l'axe Z_W est orienté vers le haut.

4.2.2.2 Matrices de changement de repère

Le principe fondamental de la dynamique est très souvent écrit dans le repère intermédiaire alors que les grandeurs vectorielles sont généralement projetées dans le repère véhicule. Pour passer d'un repère à un autre, il faut utiliser une matrice de changement de repère telle que

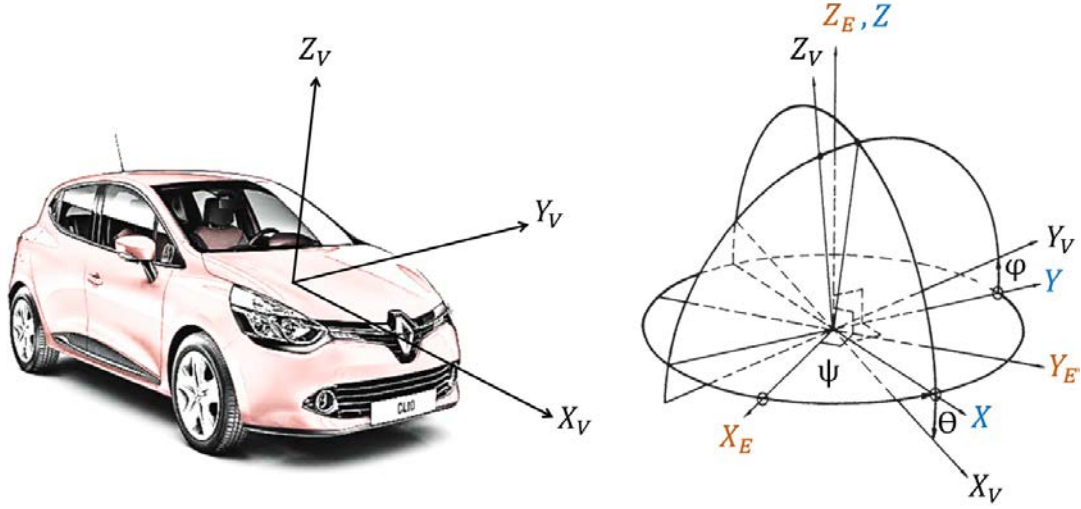


FIGURE 4.2 – Définitions des repères utilisés

définie ci dessous :

$$P_{R_V \rightarrow R_I} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \sin \theta \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ -\sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$P_{R_I \rightarrow R_E} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$P_{R_V \rightarrow R_I}$ désigne la matrice de passage du repère R_V au repère R_I et $P_{R_I \rightarrow R_E}$ du repère R_I au repère R_E . La matrice de passage du repère R_V au repère R_E est donc la suivante :

$$\begin{aligned} P_{R_V \rightarrow R_E} &= P_{R_V \rightarrow R_I} \cdot P_{R_I \rightarrow R_E} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.2.2.3 Cinématique de la masse suspendue

La cinématique du véhicule peut être définie par des variables décrivant le mouvement linéaire et des variables décrivant le mouvement angulaire.

Les variables décrivant le mouvement linéaire sont :

- **Vecteur vitesse du véhicule \vec{v}** : Vecteur représentant la vitesse de l'origine du référentiel véhicule R_V dans le référentiel sol R_E ;

- **Vitesse longitudinale du véhicule v_X** : Projection du vecteur vitesse du véhicule sur l'axe X ;
- **Vitesse latérale du véhicule v_Y** : Projection du vecteur vitesse du véhicule sur l'axe Y ;
- **Vitesse verticale du véhicule v_Z** : Projection du vecteur vitesse du véhicule sur l'axe Z ;
- **Accélération du véhicule \vec{a}** : Vecteur représentant l'accélération de l'origine du référentiel véhicule R_V dans le référentiel sol R_E ;
- **Accélération longitudinale du véhicule a_X** : Projection du vecteur accélération du véhicule sur l'axe X ;
- **Accélération latérale du véhicule a_Y** : Projection du vecteur accélération du véhicule sur l'axe Y ;
- **Accélération verticale du véhicule a_Z** : Projection du vecteur accélération du véhicule sur l'axe Z .

Les variables décrivant le mouvement angulaire sont les suivants :

- **Angle de roulis du véhicule φ** : Angle (Y, Y_V) autour de l'axe X_V ;
- **Angle de tangage du véhicule θ** : Angle (X, X_V) autour de l'axe Y ;
- **Angle de lacet du véhicule ψ** : Angle (X_E, X) autour de l'axe Z_E ;
- **Angle de dérive du véhicule β** : Angle (X, v_h) autour de l'axe Z , avec v_h la vitesse horizontale du véhicule, résultante de v_X et v_Y . Cet angle peut être calculé de la manière suivante :

$$\beta = \arctan\left(\frac{v_Y}{v_X}\right) \quad (4.4)$$

- **Vitesse angulaire du véhicule $\vec{\omega}$** : Vecteur représentant la vitesse angulaire du référentiel véhicule R_V ;
- **Vitesse de roulis ω_X** : Projection du vecteur de vitesse angulaire du véhicule sur l'axe X ;
- **Vitesse de tangage ω_Y** : Projection du vecteur de vitesse angulaire du véhicule sur l'axe Y ;
- **Vitesse de lacet ω_Z** : Projection du vecteur de vitesse angulaire du véhicule sur l'axe Z ;
- **Accélération angulaire du véhicule $\vec{\dot{\omega}}$** : Vecteur représentant l'accélération angulaire du référentiel véhicule R_V ;

Le modèle de dynamique véhicule étudié se compose de différents sous-modèles : le sous-modèle de direction, le sous-modèle de caisse, le sous-modèle de suspensions et le sous-modèle

de roues. Une présentation détaillée de ceux-ci est proposée dans les sections qui suivent.

4.2.3 Présentation du sous-modèle de direction

Le système de direction permet de transmettre le mouvement de rotation du volant aux roues directrices. Il se compose de différents éléments :

- **le volant** qui transforme l'effort du conducteur en un effort volant ;
- **la colonne de direction** qui transmet l'effort volant au boîtier de direction ;
- **le boîtier de direction** qui effectue la démultiplication du mouvement entre la colonne de direction et la bielle pendante ;
- **la bielle pendante** qui fait le lien entre l'axe de sortie du boîtier de direction et la barre de direction ;
- **le levier d'attaque** qui relie la bielle pendante à la barre de direction. Elle permet de transmettre les efforts de commande ;
- **les fusées** qui supportent la roue et peuvent tourner par rapport à l'essieu ;
- **les leviers d'accouplement** qui permettent de transmettre les mouvements via la barre d'accouplement d'une fusée à l'autre ;
- **la barre d'accouplement** qui relie les fusées et permet d'agir sur le parallélisme des roues via des manchons à rotule.

Afin de définir plus précisément ce sous système « direction », il est nécessaire d'évaluer certaines variables comme le couple au volant (C_{Volant} en $N.m$), le couple à la colonne ($C_{Colonne}$ en $N.m$), l'effort à la crémaillère (F_{Crem} en N) et l'angle de rotation du pignon de crémaillère (A_{Pignon} en rad).

Couple à la colonne

Le couple à la colonne peut-être approximé à partir du couple à la roue, via le rapport de démultiplication ($demul$). Ce rapport est égal au quotient de l'angle au volant (A_{Volant} en rad) et de l'angle de braquage moyen aux roues avant (δ en rad). Ce rapport est variable, notamment du fait des cardans mais aussi du fait de la conception des trains.

Le couple à la colonne s'exprime alors en fonction des moments d'auto-alignement ($M_{zPneu_{ij}}$ en $N.m$) :

$$C_{Colonne} = \frac{-(M_{zPneu_{11}} + M_{zPneu_{12}})}{demul} \quad (4.5)$$

Couple au volant

Le couple au volant est calculé à partir du couple à la colonne, en prenant en compte l'assistance de direction. Pour cela, une cartographie donnant le couple d'assistance (C_{Assist} en $N.m$) en fonction du couple à la colonne est utilisée. C_{Volant} s'écrit ainsi :

$$C_{Volant} = C_{Colonne} - C_{Assist} \quad (4.6)$$

Effort crémaillère

Cet effort est obtenu à partir du couple à la colonne et du rayon du pignon de crémaillère (R_{Pignon} en m) :

$$F_{Crem} = \frac{C_{Colonne}}{R_{Pignon}} \quad (4.7)$$

Angle de rotation du pignon de crémaillère

Il existe souvent un écart entre l'angle au volant (A_{Volant} en rad) et l'angle de rotation du pignon de crémaillère. Cet écart est lié aux flexibilités amont ($Flex_{Amont}$ en $rad/(N.m)$) et aval ($Flex_{Aval}$ en $rad/(N.m)$) en torsion de la colonne de direction :

$$A_{Pignon} = A_{Volant} - C_{Volant} \cdot Flex_{Amont} - C_{Colonne} \cdot Flex_{Aval} \quad (4.8)$$

4.2.4 Présentation du sous-modèle de caisse

Dans la section 4.2.2.3, une présentation des deux types de mouvements de la caisse (translations et rotations) a été effectuée. Une description plus détaillée de ces derniers est proposée dans cette section en utilisant les notations présentées FIGURE 4.3.

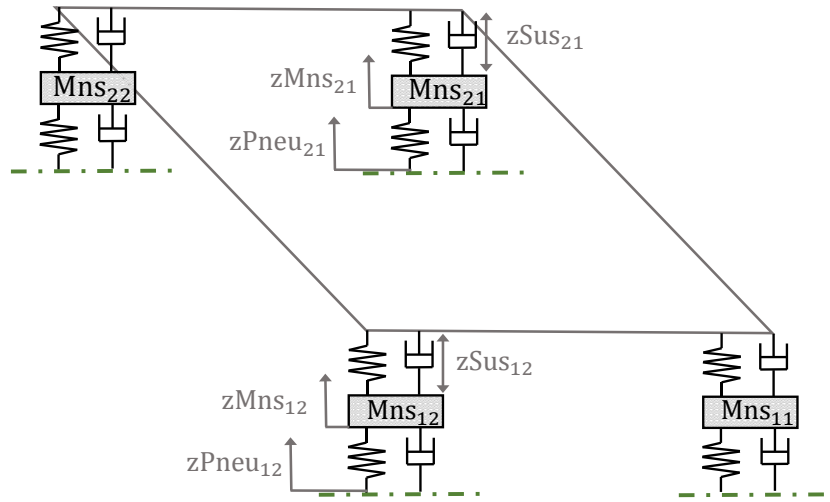


FIGURE 4.3 – Schéma du modèle simplifié utilisé (2)

4.2.4.1 Translation de la caisse

Axes Longitudinal et transversal

Afin de traduire ce mouvement de translation longitudinale et transversale, le théorème de la résultante dynamique est appliqué au véhicule complet, dans le repère intermédiaire. Il s'écrit :

$$M \cdot \begin{pmatrix} a_X \\ a_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{xSusp11} + F_{xSusp12} + F_{xSusp21} + F_{xSusp22} + F_{Aero} \\ F_{ySusp11} + F_{ySusp12} + F_{ySusp21} + F_{ySusp22} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

où M est la masse totale du véhicule (en kg), $F_{xSusp_{ij}}$ l'effort longitudinal au niveau de la suspension (en N dans R_I), $F_{ySusp_{ij}}$ l'effort latéral au niveau de la suspension (en N dans R_I) et F_{Aero} la force de résistance aérodynamique à l'avancement (au centre de gravité, en N).

$F_{xSusp_{ij}}$ et $F_{ySusp_{ij}}$ sont égaux aux efforts longitudinaux $F_{xPneu_{ij}}$ et latéraux $F_{yPneu_{ij}}$ aux roues auxquels il faut appliquer la matrice de passage du repère roue au repère intermédiaire. Puis, il faut appliquer l'angle δ_{ij} , l'angle de braquage de la roue ij , afin de passer du repère intermédiaire au repère roue. La matrice de changement de repère associée s'écrit donc :

$$P_{R_W \rightarrow R_I} = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

et on obtient :

$$\begin{pmatrix} F_{xSusp_{ij}} \\ F_{ySusp_{ij}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{xPneu_{ij}} \cdot \cos \delta_{ij} - F_{yPneu_{ij}} \cdot \sin \delta_{ij} \\ F_{xPneu_{ij}} \cdot \sin \delta_{ij} + F_{yPneu_{ij}} \cdot \cos \delta_{ij} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

En outre, pour avancer, le véhicule doit vaincre la force de frottement qu'exerce l'air appelée **traînée aérodynamique ou force de résistance aérodynamique à l'avancement** F_{Aero} (cf équation(4.9)).

Pour diminuer la résistance aérodynamique d'une automobile, les constructeurs peuvent agir sur deux paramètres : le coefficient de traînée C_x (sans unité) qui caractérise la qualité de « profilage aérodynamique » du véhicule, et le maître-couple S (en m^2) qui est la surface exposée. Cette force peut être calculée de la manière suivante :

$$F_{Aero} = -\frac{1}{2} \cdot \rho_{air} \cdot S \cdot C_x \cdot v_X^2 \quad (4.12)$$

où ρ_{air} est la masse volumique de l'air (en $kg.m^{-3}$).

En utilisant les équations (4.11) et (4.12) les expressions des accélérations longitudinales et latérales deviennent :

$$\begin{pmatrix} a_X \\ a_Y \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1,2} (F_{xPneu_{ij}} \cdot \cos \delta_{ij} - F_{yPneu_{ij}} \cdot \sin \delta_{ij}) - \frac{1}{2} \cdot \rho_{air} \cdot S \cdot C_x \cdot v_X^2 \\ \sum_{i,j=1,2} (F_{xPneu_{ij}} \cdot \sin \delta_{ij} + F_{yPneu_{ij}} \cdot \cos \delta_{ij}) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Axe Vertical

Appliquons à présent le théorème de la résultante dynamique à la caisse, dans le repère R_I , afin de calculer l'accélération verticale :

$$Ms.a_Z = F_{zSusp11} + F_{zSusp12} + F_{zSusp21} + F_{zSusp22} - g.Ms \quad (4.14)$$

où Ms est la masse suspendue du véhicule et est égale à la masse totale (M) moins les quatres masses non suspendues (Mns_{ij}).

Ainsi l'accélération verticale s'écrit :

$$a_Z = \frac{1}{Ms}(F_{zSusp11} + F_{zSusp12} + F_{zSusp21} + F_{zSusp22}) - g \quad (4.15)$$

Le calcul des $F_{zSusp_{ij}}$ sera explicité dans la section « sous-modèle suspension ».

4.2.4.2 Rotation de la caisse

Il est possible de déterminer les expressions des accélérations angulaires, ω_X l'accélération de roulis, ω_Y l'accélération de tangage et ω_Z l'accélération de lacet en appliquant le théorème du moment dynamique autour du centre de gravité dans le repère intermédiaire.

L'ensemble des forces extérieures agissant sur le véhicule à l'instant t se réduit à une force \vec{F} et un moment \vec{M} [ISO, 2011]. Ce moment \vec{M} peut être décomposé en 3 composantes, M_X le moment de roulis (projection du moment \vec{M} sur l'axe X), M_Y le moment de tangage (projection du moment \vec{M} sur l'axe Y) et M_Z le moment de lacet (projection du moment \vec{M} sur l'axe Z).

En utilisant ces notations, le moment cinétique au centre de gravité du véhicule s'écrit [Guillet, 2011] :

$$\vec{\sigma}(G_V \in R_V/R_E) = I.\vec{\Omega}_{R_V/R_E} = I. \begin{pmatrix} w_X \\ w_Y \\ w_Z \end{pmatrix}_{R_V} \quad (4.16)$$

où I désigne la matrice d'inertie du véhicule.

Ce tenseur est symétrique, c'est-à-dire qu'il ne se compose que de six éléments, I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} les moments d'inerties et I_{xy} , I_{xz} , I_{yz} les produits d'inerties. Par ailleurs, le plan du véhicule (X_V, Z_V) est confondu avec le plan longitudinal de symétrie du véhicule. Ainsi $I_{yz} = 0$ et $I_{xy} = 0$. De plus, I_{xz} peut être considéré comme négligeable par rapport aux trois autres moments d'inerties restants.

Par ailleurs, il convient de bien séparer les mouvements de la caisse qui sont le roulis et le tangage du mouvement de lacet du véhicule complet. Les inerties des masses non suspendues doivent donc être retirées des inerties en roulis et en tangage du véhicule.

Ainsi, l'équation 4.16 devient :

$$\vec{\sigma}(G_V \in R_V/R_E) = \begin{pmatrix} I_{xx}.w_X \\ I_{yy}.w_Y \\ I_{zz}.w_Z \end{pmatrix}_{R_V} \quad (4.17)$$

Par dérivation du moment cinétique, on obtient le moment dynamique suivant :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}(G_V \in R_V/R_E) &= \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}(G_V \in R_V/R_E))_{R_V} + \vec{\Omega}_{R_V/R_E} \wedge \vec{\sigma}(G_V \in R_V/R_E) \\ &= \begin{pmatrix} I_{xx}.\dot{w}_X \\ I_{yy}.\dot{w}_Y \\ I_{zz}.\dot{w}_Z \end{pmatrix}_{R_V} + \begin{pmatrix} w_X \\ w_Y \\ w_Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} I_{xx}.w_X \\ I_{yy}.w_Y \\ I_{zz}.w_Z \end{pmatrix}_{R_V} \\ &= \begin{pmatrix} I_{xx}.\dot{w}_X + w_Y.w_Z.(I_{zz} - I_{yy}) \\ I_{yy}.\dot{w}_Y + w_X.w_Z.(I_{xx} - I_{zz}) \\ I_{zz}.\dot{w}_Z + w_X.w_Y.(I_{yy} - I_{xx}) \end{pmatrix}_{R_V} \end{aligned} \quad (4.18)$$

De plus, le théorème du moment dynamique stipule que le moment dynamique en G_V , dans le référentiel R_E est égal à la somme des moments des actions extérieures (forces exprimées dans R_I) soit :

$$\vec{\delta}(G_V \in R_V/R_E) = \sum \vec{M}_{G_V}(\vec{F}_{ext}) \quad (4.19)$$

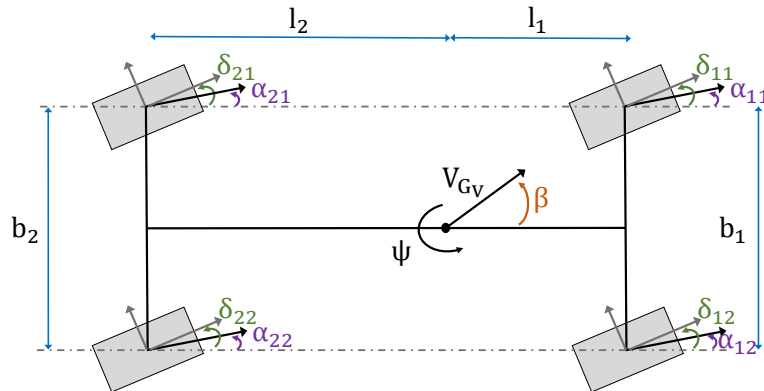


FIGURE 4.4 – Schéma du modèle simplifié utilisé (3)

Ainsi, en utilisant les notations présentées FIGURE 4.4,

$$\begin{aligned}
 I_{xx}.\dot{w}_X + w_Y.w_Z.(I_{zz} - I_{yy}) = & (F_{zSusp11} - F_{zSusp12}).\frac{b_1}{2} + (F_{zSusp21} - F_{zSusp22}).\frac{b_2}{2} \\
 & + \sum_{i,j=1,2} F_{ySusp_{ij}}.(z_{Susp_{ij}} + h) \\
 & + \sum_{i,j=1,2} M_{xPneu_{ij}} \\
 & + \mathbf{Ms.g.h_0.sin(\varphi).cos(\theta)} \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{yy}.\dot{w}_Y + w_X.w_Z.(I_{xx} - I_{zz}) = & (F_{xSusp12} - F_{xSusp11}).\frac{b_1}{2} + (F_{xSusp22} - F_{xSusp21}).\frac{b_2}{2} \\
 & + (F_{ySusp11} + F_{ySusp12}).l_1 - (F_{ySusp21} + F_{ySusp22}).l_2 \\
 & + \sum_{i,j=1,2} M_{zPneu_{ij}} \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{zz}.\dot{w}_Z + w_X.w_Y.(I_{yy} - I_{xx}) = & (F_{zSusp21} + F_{zSusp22} - 2.F_{z_0Susp2}).l_2 \\
 & - (F_{zSusp11} + F_{zSusp12} - 2.F_{z_0Susp1}).l_1 \\
 & - \sum_{i,j=1,2} F_{xSusp_{ij}}.(z_{Susp_{ij}} + h) \\
 & + \mathbf{Ms.g.h_0.cos(\varphi).sin(\theta)} \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

avec :

b_1 la voie avant et b_2 la voie arrière (cf. FIGURE 4.4) ;

l_1 l'empattement avant et l_2 l'empattement arrière ;

h la hauteur du centre de gravité par rapport au sol ;

h_0 la distance du centre de gravité à l'axe de roulis ;

$z_{Susp_{ij}}$ les débattements verticaux de suspensions (cf. section « sous-modèle de suspension ») ;

F_{z_0Susp1} l'effort statique de suspension pour une suspension avant (F_{z_0Susp2} pour une suspension arrière).

Remarque : les expressions en gras présentes dans les équations (4.20 et (4.22) traduisent le mouvement de balancier du centre de gravité (en roulis et tangage).

4.2.5 Présentation du sous-modèle de suspension

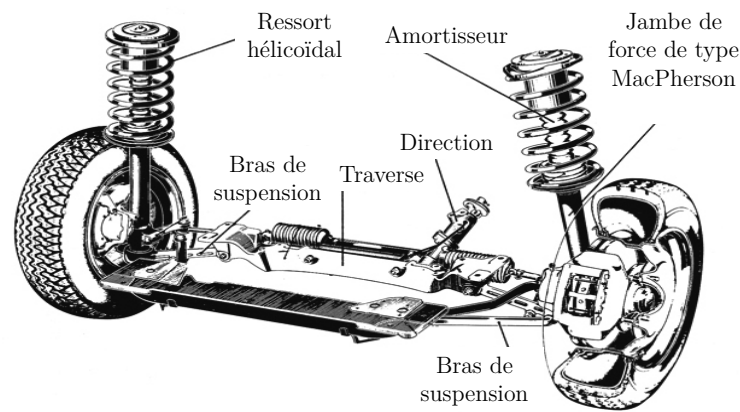
Le système de suspension caractérise l'ensemble des pièces qui relient la roue à la caisse du véhicule. Ce système a plusieurs rôles [Arnoux, 2008] :

- **le guidage** : permettre la génération de poussées longitudinales d'accélération, de freinage et transversales en virage ;
- **le contrôle des attitudes** : la suspension doit permettre de contrôler les mouvements de la caisse et des roues ;

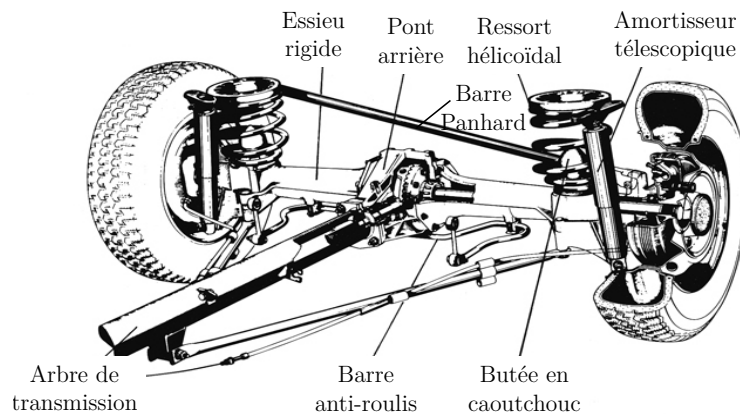
- **le filtrage** : filtrer les oscillations des roues et ainsi assurer le confort des passagers et la protection des organes mécaniques ;
- **l'adhérence** : garantir une bonne tenue de route en maintenant un contact permanent entre les roues et le sol et permettre le débattement de la roue.

On peut distinguer deux grand types de systèmes de suspension :

- **la suspension à roues indépendantes** : sur un même essieu (avant ou arrière), les roues droite et gauche ne sont pas liées (cf. FIGURE 4.5(a)) ;
- **la suspension à essieu rigide ou semi-rigide** : sur un même essieu (e.g. arrière cf. FIGURE 4.5(b)), les roues droite et gauche sont liées .



(a) Train avant de type « pseudo Mc Pherson » à roues indépendantes



(b) Train arrière à essieu rigide et barre Panhard

FIGURE 4.5 – Représentation de deux types de systèmes de suspensions

Le modèle de suspension choisi est un modèle simple ressort-amortisseur comme présenté FIGURES 4.3 et 4.6 .

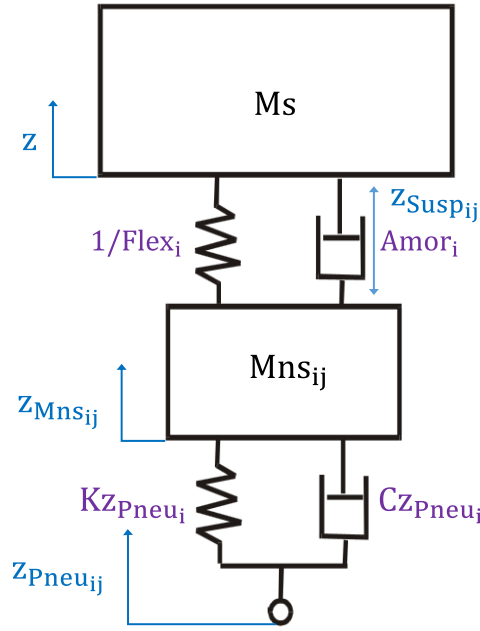


FIGURE 4.6 – Modèle quart de véhicule

Il est ainsi possible de calculer le débattement et la vitesse de débattement de suspension, pour chaque roue, de la manière suivante :

$$z_{Susp11} = z - l_1.\theta + \frac{b_1}{2}.\varphi - z_{Mns11} \implies \dot{z}_{Susp11} = \dot{z} - l_1.\omega_Y + \frac{b_1}{2}.\omega_X - \dot{z}_{Mns11} \quad (4.23)$$

$$z_{Susp12} = z - l_1.\theta - \frac{b_1}{2}.\varphi - z_{Mns12} \implies \dot{z}_{Susp12} = \dot{z} - l_1.\omega_Y - \frac{b_1}{2}.\omega_X - \dot{z}_{Mns12} \quad (4.24)$$

$$z_{Susp21} = z + l_2.\theta + \frac{b_2}{2}.\varphi - z_{Mns21} \implies \dot{z}_{Susp21} = \dot{z} + l_2.\omega_Y + \frac{b_2}{2}.\omega_X - \dot{z}_{Mns21} \quad (4.25)$$

$$z_{Susp22} = z + l_2.\theta - \frac{b_2}{2}.\varphi - z_{Mns22} \implies \dot{z}_{Susp22} = \dot{z} + l_2.\omega_Y - \frac{b_2}{2}.\omega_X - \dot{z}_{Mns22} \quad (4.26)$$

où :

z_{Suspij} (en m) et \dot{z}_{Suspij} (en m/s) caractérisent le débattement vertical et la vitesse de débattement vertical de suspension à la roue ij . Les débattements sont positifs vers le rebond et négatifs vers le choc ;

z (en m) et $\dot{z} = v_X$ (en m/s) caractérisent le pompage (variation de la hauteur du centre de gravité/cas de charge d'étude) et la vitesse de pompage. On obtient ces deux données par intégration de l'accélération verticale a_Z (cf. équation (4.15)) ;

z_{Mnsij} (en m) et \dot{z}_{Mnsij} (en m/s) caractérisent le débattement et la vitesse de débattement du centre de la roue ij (point K dans la norme ISO).

Il convient d'appliquer le principe fondamental de la dynamique aux masses non suspendues afin de calculer l'accélération de débattement du centre de la roue ij (et par intégration la vitesse de débattement et le débattement) :

$$\ddot{z}_{Mnsij} = \frac{F_{zPneuij} - F_{zSuspij}}{Mnsij} - 9,81 \quad (4.27)$$

En ce qui concerne les efforts de suspension, l'équation (4.11) permet d'obtenir les valeurs des forces longitudinales et latérales de suspension ($F_{xSusp_{ij}}$ et $F_{ySusp_{ij}}$). Il reste à définir la force verticale de suspension $F_{zSusp_{ij}}$ qui se compose de trois éléments :

$$F_{zSusp_{ij}} = F_{zRaid_{ij}} + F_{zAmor_{ij}} + F_{zBrou_{ij}} \quad (4.28)$$

$F_{zRaid_{ij}}$ caractérise les efforts verticaux dûs aux raideurs de la roue ij , $F_{zAmor_{ij}}$ les efforts verticaux d'amortissement à la roue ij et $F_{zBrou_{ij}}$ l'effort des effets Brouilhet.

Les efforts $F_{zRaid_{ij}}$ et $F_{zAmor_{ij}}$ se calculent de la manière suivante :

$$F_{zRaid_{ij}} = F_{z_0Susp_i} - \frac{z_{Susp_{ij}}}{Flex_i} + (-1)^{j+1} \cdot K_{bar_i} * \varphi \quad (4.29)$$

$$F_{zAmor_{ij}} = -Amor_i * \dot{z}_{Susp_{ij}} \quad (4.30)$$

$$(4.31)$$

avec $Flex_i$ la flexibilité verticale au train i (en m/N), K_{bar_i} la raideur anti-roulis au train i (Nm/rad) et $Amor_i$ l'amortissement vertical au train i ($N/m/s$).

Par ailleurs, **les effets Brouilhet** modélisent les déformations cinématiques des trains, qui modifient la position de l'axe principal de rotation de la caisse en roulis ou en tangage [Arnoux, 2008].

Ces effets cinématiques anti-plongée au freinage, anti-cabrage à l'accélération, ou anti-roulis en virage permettent un meilleur contrôle des attitudes de caisse, et une meilleure stabilité du véhicule. Ils sont égaux à :

$$F_{zBrou_{ij}} = \lambda_{Brou_i} \cdot F_{xPneu_{ij}} + (-1)^j \cdot \mu_{Brou_i} \cdot F_{yPneu_{ij}} \quad (4.32)$$

4.2.5.1 Cinématique des trains

La cinématique des trains (ou géométrie des essieux) décrit les mouvements des roues induits lors des déplacements verticaux de la suspension et le braquage de la direction [Duysinx, 2014]. Afin de décrire cette cinématique, il est nécessaire de calculer les variations cinématiques de carrossage, de braquage et les variations de braquage de direction.

Variation cinématique de carrossage

La variation cinématique de carrossage (γ_{cij} en rad) se compose des variations de carrossage en pompage et en roulis :

$$\gamma_{cij} = (-1)^{j+1} \cdot \gamma_{Zij} \cdot z_{Pomp_{ij}} + \lambda_{ij} \cdot \varphi \quad (4.33)$$

avec γ_{Zij} la variation de carrossage en pompage (en rad/m), $z_{Pomp_{ij}}$ le pompage (caisse/point K) à chaque roue (en m) et λ_{ij} le coefficient de carrossage induit par le roulis (en rad/rad).

Le pompage à chaque roue vaut par ailleurs :

$$z_{Pomp_{ij}} = \frac{z_{Susp_{i1}} + z_{Susp_{i2}}}{2} \quad (4.34)$$

Variation cinématique de braquage

La variation cinématique de braquage (δ_{cij} en rad) se compose des variations de braquage en pompage et en roulis :

$$\delta_{cij} = (-1)^{j+1} \cdot \delta_{Zij} \cdot z_{Pomp_{ij}} + \epsilon_{ij} \cdot \varphi \quad (4.35)$$

avec δ_{Zij} la variation de braquage en pompage (en rad/m), $z_{Pomp_{ij}}$ le pompage (caisse/point K) à chaque roue (en m) et ϵ_{ij} le coefficient de braquage induit par le roulis (en rad/rad).

Variation de braquage de direction

La variation de braquage de direction (δ_{vij} en rad) est proportionnelle à l'angle de rotation du pignon de crémaillère (2 roues directrices avant) :

$$\delta_{v1j} = A_{Pignon}/demul \quad (4.36)$$

$$\delta_{v2j} = 0 \quad (4.37)$$

4.2.5.2 Élasto-cinématique des trains

L'élasto-cinématique des trains se définit comme l'altération des positions de la roue causée d'une part, par les forces et moments engendrés entre le pneumatique et la route et d'autre part, par les mouvements longitudinaux de la roue destinés à lutter contre les changements de géométrie (lié à la souplesse des points d'ancrage de l'essieu) [Duyssinx, 2014]. Il se compose des déformations élastiques en braquage et en carrossage ainsi que des effets Brouilhet (définis équation (4.32)).

Déformations élastiques des trains en braquage

Ces déformations peuvent être calculées à partir des paramètres de flexibilité des trains obtenus par le biais d'une aire de raideur :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta_{d11} \\ \delta_{d12} \\ \delta_{d21} \\ \delta_{d22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ft_{rs1} \\ ft_{rs1} \\ ft_{rs2} \\ ft_{rs2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{ySusp11} \\ F_{ySusp12} \\ F_{ySusp21} \\ F_{ySusp22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ft_{rns1} \\ ft_{rns1} \\ ft_{rns2} \\ ft_{rns2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{ySusp12} \\ F_{ySusp11} \\ F_{ySusp22} \\ F_{ySusp21} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} fm_{rs1} \\ fm_{rs1} \\ fm_{rs2} \\ fm_{rs2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{zPneu11} \\ M_{zPneu12} \\ M_{zPneu21} \\ M_{zPneu22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} fm_{rns1} \\ fm_{rns1} \\ fm_{rns2} \\ fm_{rns2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{zPneu12} \\ M_{zPneu11} \\ M_{zPneu22} \\ M_{zPneu21} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} fl_{rs1} \\ -fl_{rs1} \\ fl_{rs2} \\ -fl_{rs2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{xSusp11} \\ F_{xSusp12} \\ F_{xSusp21} \\ F_{xSusp22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} fl_{rns1} \\ -fl_{rns1} \\ fl_{rns2} \\ -fl_{rns2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{xSusp12} \\ F_{xSusp11} \\ F_{xSusp22} \\ F_{xSusp21} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.38)$$

où :

ft_{rs_i} et ft_{rns_i} désignent les flexibilités sous effort roue sollicitée/roue non sollicitée (en rad/N) ;
 fm_{rs_i} et fm_{rns_i} désignent les flexibilités sous couple roue sollicitée/roue non sollicitée (en $rad/(N.m)$) ;
 fl_{rs_i} et fl_{rns_i} désignent les flexibilités sous effort moteur/freineur roue sollicitée/roue non sollicitée (en rad/N).

Déformations élastiques des trains en carrossage

En utilisant les flexibilités de carrossage sous effort roue sollicitée/non sollicitée (ftc_{rs_i} et ftc_{rns_i} en rad/N), ces déformations s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \gamma_{d11} \\ \gamma_{d12} \\ \gamma_{d21} \\ \gamma_{d22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ftc_{rs1} \\ ftc_{rs1} \\ ftc_{rs2} \\ ftc_{rs2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{ySusp11} \\ F_{ySusp12} \\ F_{ySusp21} \\ F_{ySusp22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ftc_{rns1} \\ ftc_{rns1} \\ ftc_{rns2} \\ ftc_{rns2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{ySusp12} \\ F_{ySusp11} \\ F_{ySusp22} \\ F_{ySusp21} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Angle total résultant

Ainsi, en prenant en compte la cinématique et l'élasto-cinématique des trains, le carrossage et le braquage sont égaux à :

$$\gamma_{ij} = (-1)^{j+1} \cdot \gamma_{0ij} + \gamma_{cij} + \gamma_{dij} \quad (4.40)$$

$$\delta_{1j} = (-1)^{j+1} \cdot \delta_{0ij} + \delta_{cij} + \delta_{dij} + \delta_{v1j} \quad (4.41)$$

$$\delta_{2j} = (-1)^{j+1} \cdot \delta_{0ij} + \delta_{cij} + \delta_{dij} \quad (4.42)$$

où γ_{0ij} et δ_{0ij} désignent le carrossage initial et le braquage initial.

4.2.6 Présentation du sous-modèle de roues

Une présentation détaillée du pneumatique a été effectuée au Chapitre 1. Le modèle de contact roue/sol que nous allons utiliser comme référence est le modèle de Pacejka (*cf.* section 1.3.3). Dans les sections suivantes, une comparaison des résultats obtenus avec ce modèle et avec le modèle développé (modèle dynamique à paramètres variants) sera effectuée.

Rappel :

- Les entrées du modèle de Pacejka sont la dérive du pneumatique (α en rad), le pseudo-glissement (S_x en %), le carrossage (γ en rad), l'effort vertical ($F_{zPneu_{ij}}$ en N).
- La dérive du pneumatique est égale à :

$$\alpha_{ij} = \arctan \frac{V_{yRoue_{ij}}}{V_{xRoue_{ij}}} \quad (4.43)$$

Lorsque la vitesse longitudinale à la roue tend vers zéro, le calcul de la dérive devient instable. C'est pourquoi une vitesse seuil notée V_{xSeuil} est créée ($V_{xSeuil} = 10km/h$) afin d'arrêter la simulation lorsque $V_{xRoue_{ij}} < V_{xSeuil}$. Étant donné le type de manœuvre étudié, c'est-à-dire des roulages à moyennes et hautes vitesses, $V_{xRoue_{ij}}$ ne devrait pas atteindre V_{xSeuil} .

- Le pseudo-glissement (en %) est égal à :

$$S_x = 100. \left(1 - \frac{\omega_{ij} \cdot r_{dyn_{ij}}}{V_{xRoue_{ij}}}\right) \quad (4.44)$$

- Les sorties du modèle de Pacejka sont l'effort longitudinal au pied de roue ($F_{xPneu_{ij}}$), l'effort latéral au pied de roue ($F_{yPneu_{ij}}$) et le moment d'auto-alignement ($M_{zPneu_{ij}}$).

Afin de calculer ces différents paramètres, il est nécessaire de définir les vitesses à la roue ($V_{xRoue_{ij}}$ et $V_{yRoue_{ij}}$ en m/s), le rayon de roulement dynamique ($r_{dyn_{ij}}$ en m) ainsi que l'effort vertical au pied de roue.

Rayon de roulement dynamique

Il est égal au rayon sous charge statique $r_{stat_{ij}}$ moins la déflexion du flanc du pneumatique due au roulement.

$$r_{dyn_{ij}} = r_{stat_{ij}} + z_{Mns_{ij}} - z_{Pneu_{ij}} \quad (4.45)$$

avec $z_{Pneu_{ij}}$ l'altitude au sol.

Vitesse au centre roue

La vitesse du centre de la roue (point K) est calculée à partir de la vitesse de centre de gravité du véhicule. Pour cela, il faut appliquer la formule de changement de point :

$$\begin{aligned} \vec{V}_K &= \vec{V}_{G_V} + \vec{\Omega}_{R_I/R_E} \wedge \overrightarrow{G_V K} \\ &= \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ 0 \end{pmatrix}_{R_I} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} l_i \\ b_i \\ 0 \end{pmatrix}_{R_I} \\ &= \begin{pmatrix} v_X - w_Z \cdot b_i \\ v_Y + w_Z \cdot l_i \\ 0 \end{pmatrix}_{R_I} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Par projection dans le repère roue R_W (cf. FIGURE 4.7), on obtient :

$$\vec{V}_K = \begin{pmatrix} V_{xRoue_{ij}} \\ V_{yRoue_{ij}} \\ V_{zRoue_{ij}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_X - w_Z \cdot b_i) \cdot \cos(\delta_{ij}) + (v_Y + w_Z \cdot l_i) \cdot \sin(\delta_{ij}) \\ -(v_X - w_Z \cdot b_i) \cdot \sin(\delta_{ij}) + (v_Y + w_Z \cdot l_i) \cdot \cos(\delta_{ij}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

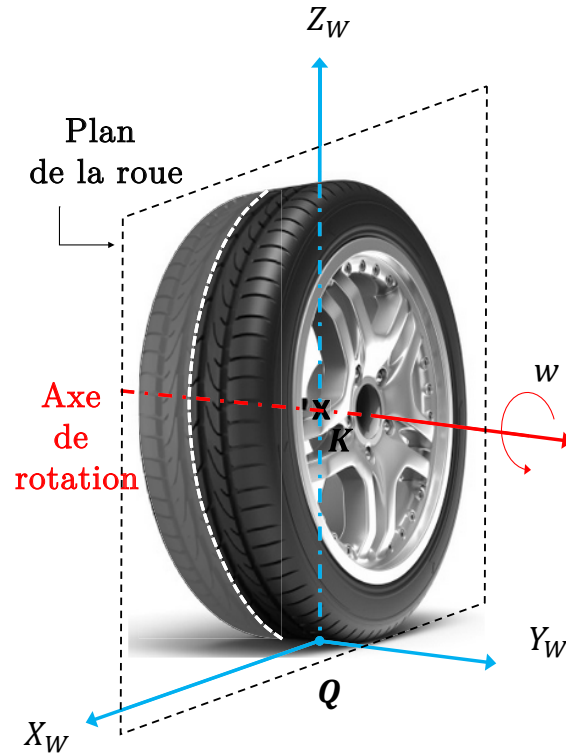


FIGURE 4.7 – Le repère roue R_W

Effort vertical au pied de roue

L'effort vertical au pied de roue se compose de l'effort statique (lié à la raideur et à la déflexion statique du pneumatique) et de l'effort dynamique. Le calcul de l'effort dynamique repose sur un modèle ressort amortisseur (*cf.* FIGURE 4.3) entre les masses non suspendues et le pied de roue. $F_{zPneu_{ij}}$ s'écrit :

$$F_{zPneu_{ij}} = \frac{M_i \cdot g}{2} - K z_{Pneu_i} \cdot (z_{Mns_{ij}} - z_{Pneu_{ij}}) - C z_{Pneu_i} \cdot (\dot{z}_{Mns_{ij}} - \dot{z}_{Pneu_{ij}}) \quad (4.48)$$

où M_i désigne la masse au train i (en kg), $K z_{Pneu_i}$ la raideur verticale d'un pneumatique au train i (en N/m) et $C z_{Pneu_i}$ l'amortissement vertical d'un pneumatique au train i (en $N/m/s$).

Pour conclure, une description du modèle simplifié de dynamique automobile (intégrant quatre sous-modèles) utilisé dans notre étude a été réalisée. En entrée de ce modèle, nous avons choisi de ne pas simuler une manœuvre, mais plutôt de fournir des données extraites de mesures effectuées sur piste.

Ainsi, dans la section suivante, une présentation du véhicule d'essais et de son instrumentation est proposée. Elle est suivie d'une description des expériences réalisées.

4.3 Présentation des essais

4.3.1 Moyens d'essais

Le véhicule d'essais, une logan MCV (*cf.* FIGURE 4.8), comporte différents capteurs qui apportent les informations essentielles dans l'étude du comportement dynamique de cette automobile.



FIGURE 4.8 – Véhicule d'essais

Dans le cadre de notre étude, nous avons utilisé les informations provenant des capteurs suivants :

- un volant dynamométrique, développé par la société FGP ;
- une unité GPS-inertielle, RT 3002, développée par la société OXFORD TECHNOLOGY ;
- deux roues dynamométriques, Swift 20 A, développées par la société MTS ;
- une centrale inertielle déportée, RT 3002 wheel, développée lors de la thèse CIFRE Renault/Laboratoire MIPS de C. LAMY [Lamy, 2010] .

Volant dynamométrique

Ce capteur (*cf.* FIGURE 4.9) mesure l'angle au volant, la vitesse volant ainsi que le couple volant. Les étendues de mesure des données sont très larges (*cf.* TABLE 4.1) . Cela permet ainsi l'étude de manœuvres très dynamiques.

	Étendue de mesure
Couple	Fort : 40 N.m / Faible : 8 N.m
Angle	Fort : $\pm 1080^\circ$ / Faible : $\pm 30^\circ$
Vitesse	$\pm 1080^\circ/\text{s}$

TABLE 4.1 – Étendues de mesure des signaux fournis par le volant dynamométrique



FIGURE 4.9 – Volant dynamométrique FGP

Unité GPS-inertielle

Cette unité, présentée FIGURE 4.10, fournit les accélérations, vitesses, positions géométriques et les angles au centre de gravité du véhicule. Ces données sont apportées avec une très bonne précision : 0,1 km/h pour les vitesses, 0,05 ° pour les angles [RT3, 2013] ...



FIGURE 4.10 – Unité GPS-inertielle, RT 3002 OxTS

Roues dynamométriques

Deux roues dynamométriques (cf. FIGURE 4.11) ont été disposées sur le véhicule d'essais : une sur la roue avant gauche et l'autre sur la roue arrière gauche. Ces capteurs fournissent les efforts et les moments au centre roue, ainsi que la vitesse de rotation de cette dernière. Ils restent adaptés à la mesure de fortes sollicitations (cf. [SWI, 2013]).

Centrale inertielle déportée

Par le biais de la centrale inertielle montée sur la roue et couplée à une antenne GPS (cf. FIGURE 4.11), nous disposons de la mesure des positions géométriques, de la vitesse et des accélérations au centre roue. De plus, cette unité mesure également la dérive du pneumatique avec une précision de 0,15 ° [RTS, 2013].



FIGURE 4.11 – Roue dynamométrique Swift 20 A MTS et centrale inertielle déportée RT 3002 wheel / antenne GPS

4.3.2 Manœuvres effectuées

Les essais ont été réalisés sur les pistes d'essais du Centre Technique Renault à Aubevoye. Les manœuvres effectuées sont des changements de file (corde à droite c'est-à-dire on tourne à droite et corde à gauche c'est-à-dire on tourne à gauche).

Dans le but de se rapprocher d'une manœuvre dite « client », trois vitesses longitudinales ont été étudiées : 50, 80 et 110 km/h. Les essais à 50 km/h ont été pratiqués sur l'aire d'évolution qui est une piste plane rectangulaire (cf. FIGURE 4.12). Pour des raisons de sécurité (aire d'évolution trop petite), la partie basse de l'anneau de vitesse a été utilisée pour les essais à 80 et 110 km/h. De plus, trois vitesses volant ont été appliquées, 100, 200 et 350 °/s, pour faire varier le caractère « dynamique » de la manœuvre. Pour terminer, trois répétitions ont été menées pour chaque condition afin de limiter tout problème lié à la mesure. La pression de gonflage des pneumatiques vaut 2,6 bars. Toutes les combinaisons des conditions d'essais ont été réalisées (plan d'expérience complet à une seule pression pour des raisons de sécurité) afin de rendre la phase de mesure plus pertinente.

Cette campagne d'essais comporte donc 2 types d'essais différents (corde à droite, corde à gauche) * 3 vitesses véhicules * 3 vitesses volant * 3 répétitions/condition, soit 54 essais.

Ces mesures sur piste sont utilisées comme données de référence dans la phase de validation du modèle qui est développée dans la section suivante.

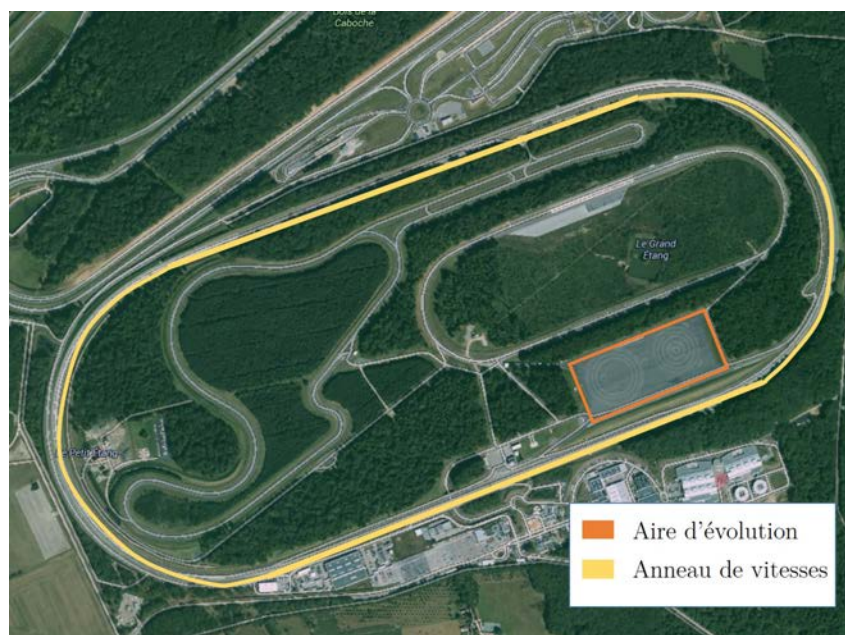


FIGURE 4.12 – Vue des pistes utilisées au Centre Technique et d'Essais Renault à Aubevoye

4.4 Deux étapes de validation du modèle

Cette phase de validation va se dérouler en deux temps (*cf.* FIGURE 4.13) :

- Dans un premier temps, une validation « directe » est effectuée. En effet, le modèle de Pacejka ainsi que le modèle dynamique à paramètres variants développé vont être comparés, sans être couplés à un modèle de dynamique automobile. Pour cela, les données d'entrée issues des essais sur piste sont directement entrées dans les deux modèles de pneumatique, et une comparaison est effectuée entre les sorties estimées par les modèles et les données mesurées lors des essais. Le but de cette validation est de supprimer tout doute sur des erreurs de modélisation qui ne seraient pas liées au modèle de pneumatique, mais au modèle de dynamique automobile. Cette étape est effectuée sur la roue avant gauche. Nous supposons que, si elle est correcte pour cette roue, elle l'est également pour la roue arrière, dont le domaine de sollicitation est plus réduit.
- Dans un second temps, une validation avec un modèle de dynamique automobile est réalisée. Les entrées du modèle de dynamique automobile sont issues d'essais sur piste, et au sein même de ce modèle, le modèle de pneumatique est, soit le modèle de Pacejka, soit le modèle dynamique à paramètres variants. Comme précédemment, les sorties du modèle de dynamique automobile sont comparées avec les données mesurées lors des essais.

4.4.1 Validation directe

Nous rappelons que le modèle de pneumatique dynamique, à paramètres variants, étudié ainsi que la procédure d'identification de ses paramètres ont été présentés à la section 3.2.4. De plus, les formulations mathématiques des fonctions d'amplification et de déphasage sont décrites à la

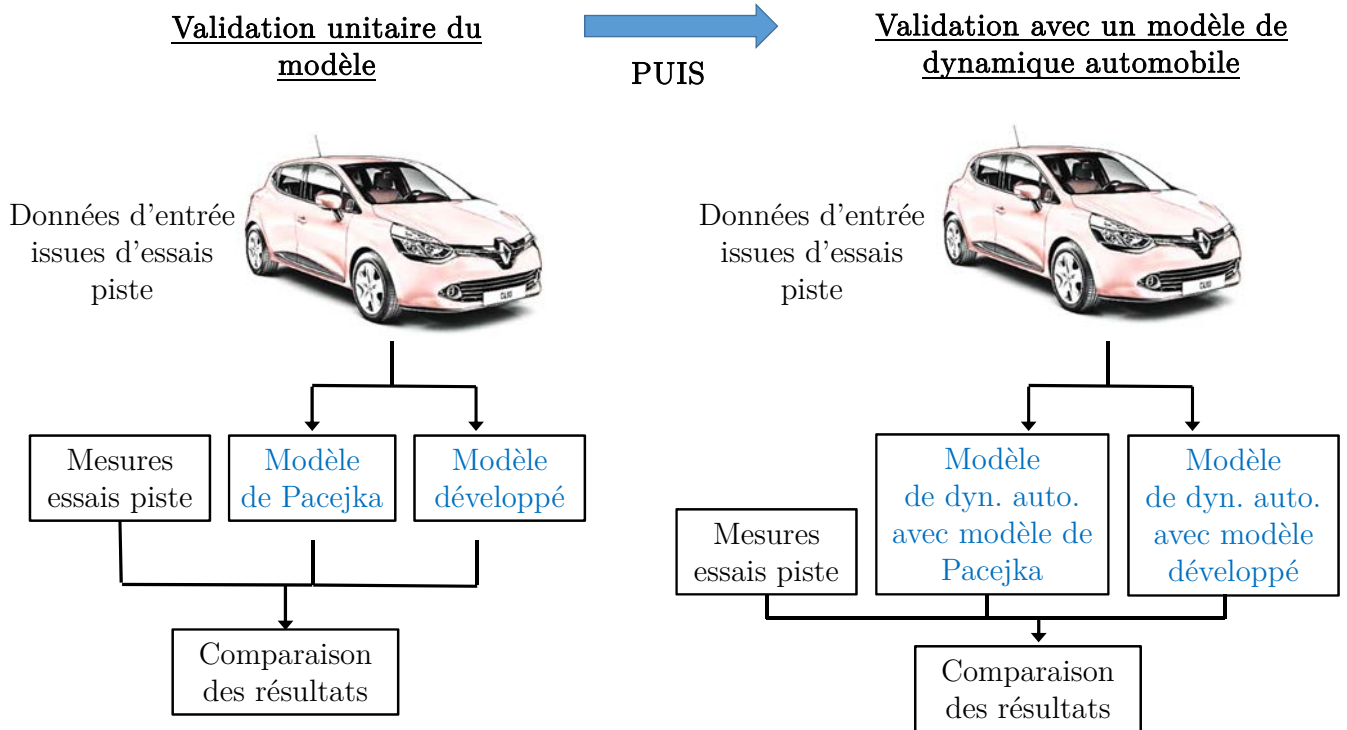


FIGURE 4.13 – Méthodes de validation

TABLE 3.9, pour une fréquence du sinus de dérive égale à 1,5 Hz. Au vu des résultats obtenus avec le plan fractionnaire, les modèles choisis sont ceux associés à ce type de plan et les paramètres d'entrée du modèle sont la dérive du pneumatique, sa charge verticale, sa pression, la vitesse longitudinale du véhicule et la fréquence du signal de sollicitation.

Étant donné que les manœuvres effectuées sont très dynamiques et qu'il s'agit de changements de files (équivalents à un coup de volant très rapide), on considère la partie dynamique du signal de dérive comme un quart de sinus dont la fréquence est utilisée en entrée du modèle, cf. FIGURE 4.14.

De plus, on applique aux données d'entrée provenant de mesures sur piste, un filtre de Butterworth d'ordre 5. Ce filtre a l'avantage de posséder un module de gain relativement constant dans le domaine fréquentiel considéré et une phase qui varie linéairement. Il s'agit d'un des filtres dont la réponse est la plus uniforme dans sa bande passante [Asch *et al.*, 2011].

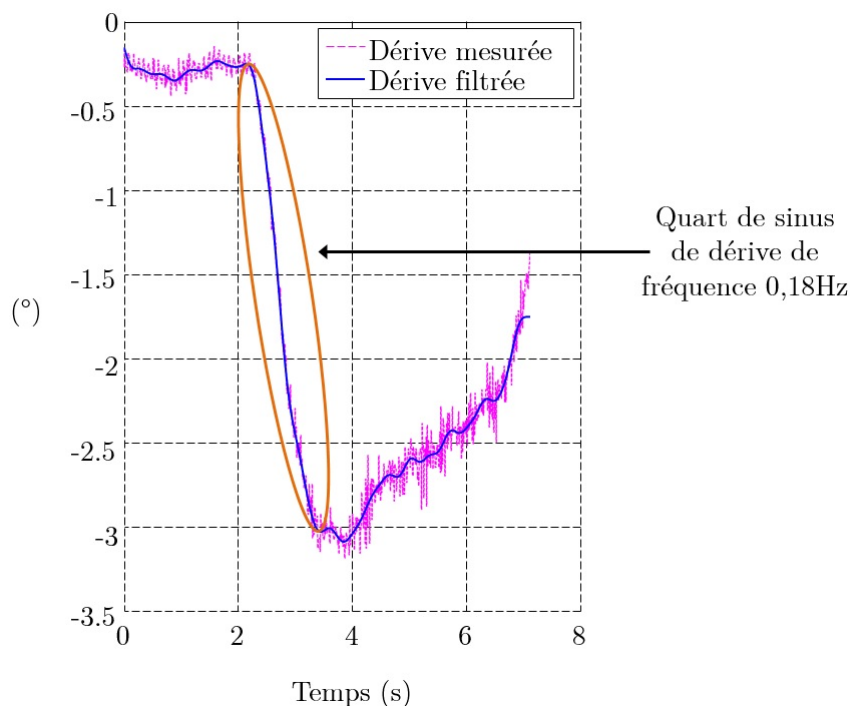


FIGURE 4.14 – Quart de sinus de dérive

4.4.1.1 Étude des signaux

A titre d'exemple, nous allons comparer les mesures de deux configurations d'essais aux sorties estimées avec les deux modèles de pneumatique.

Une synthèse complète des résultats est présentée section 4.4.1.3.

Le premier essai est un changement de file corde à droite à 80 km/h et $350^\circ/\text{s}$ de vitesse volant. Le second est l'équivalent à 110 km/h. Ces deux manœuvres ont été choisies pour leur caractère très dynamique : elles pourraient même être qualifiées de manœuvres d'urgence.

Première configuration (à 80 km/h)

Ce changement de file brutal (-90° volant en 0,25 s environ) induit une prise de dérive rapide de la roue avant gauche (assimilée à un quart de sinus de fréquence 0,33 Hz), qui atteint -5° . La force latérale créée varie également brusquement de 0 à environ -5000 N (cf. FIGURE 4.15).

Les courbes des forces latérales mesurées ou modélisées en fonction de la dérive mesurée, sont représentées FIGURE 4.16. Ces trois courbes évoluent sensiblement de la même manière. Cependant, le modèle dynamique de pneumatique à paramètres variants semble reproduire plus fidèlement le phénomène d'hystérésis. En effet, sous l'effet d'une contrainte, les élastomères présents dans le pneumatique se déforment mais ils ne reviennent à leur forme initiale seulement après un certain temps dès lors que la contrainte cesse : il s'agit du phénomène d'hystérésis. Cela explique pourquoi les courbes de chargement et de déchargement du pneumatique sont « dépha-

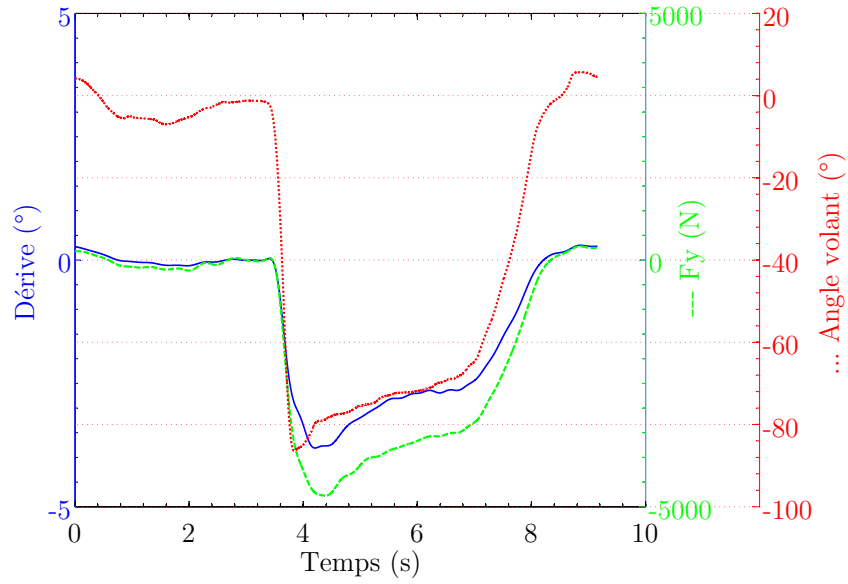


FIGURE 4.15 – Angle volant, dérive et force latérale mesurés, dans la 1^{ère} configuration

sées ».

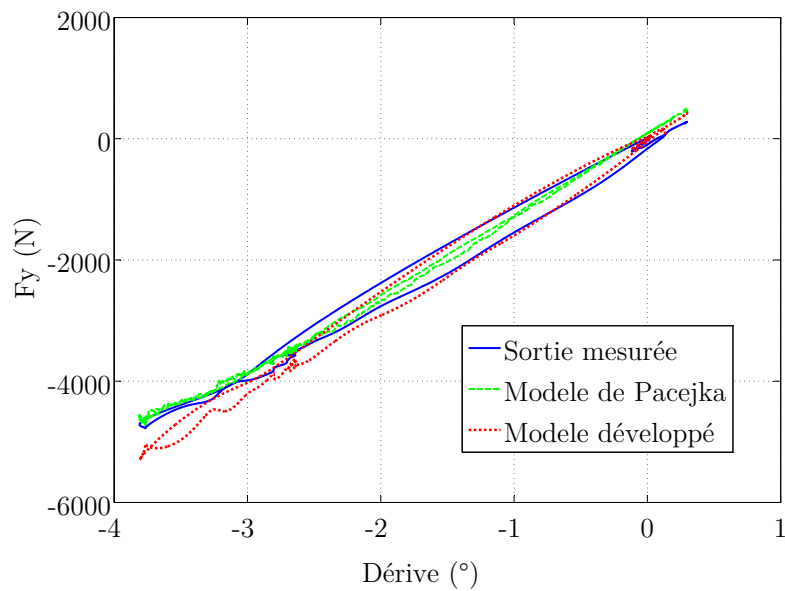


FIGURE 4.16 – Comparaison des courbes des forces latérales en fonction de la dérive mesurée

Afin de préciser cette comparaison, le critère RMSE (Root Mean Square Error) aussi appelé erreur-type, est utilisé sur les sorties F_y . Il est égal à la racine carrée de l'erreur quadratique

moyenne (MSE), c'est-à-dire :

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y(i) - \tilde{y}(i))^2}{N}} \quad (4.49)$$

avec, $y(i)$ les valeurs mesurées de la sortie, $\tilde{y}(i)$ les valeurs estimées de la sortie et N le nombre de données.

Cette erreur-type est égale à 188,57 N dans le cas du modèle de Pacejka et à 173,21 N dans le cas du modèle dynamique à paramètres variants. Ainsi, dans cette configuration, le modèle dynamique à paramètres variants prédit mieux le comportement réel du pneumatique que le modèle de Pacejka.

Deuxième configuration (à 110 km/h)

Il s'agit comme précédemment d'un changement de file brutal (-60 ° volant en 0,17 s environ) qui induit une prise de dérive rapide de la roue avant gauche (assimilée à un quart de sinus de fréquence 0,36 Hz), qui atteint -4 °. La force latérale varie également brusquement de 0 à environ -5000 N (*cf.* FIGURE 4.17).

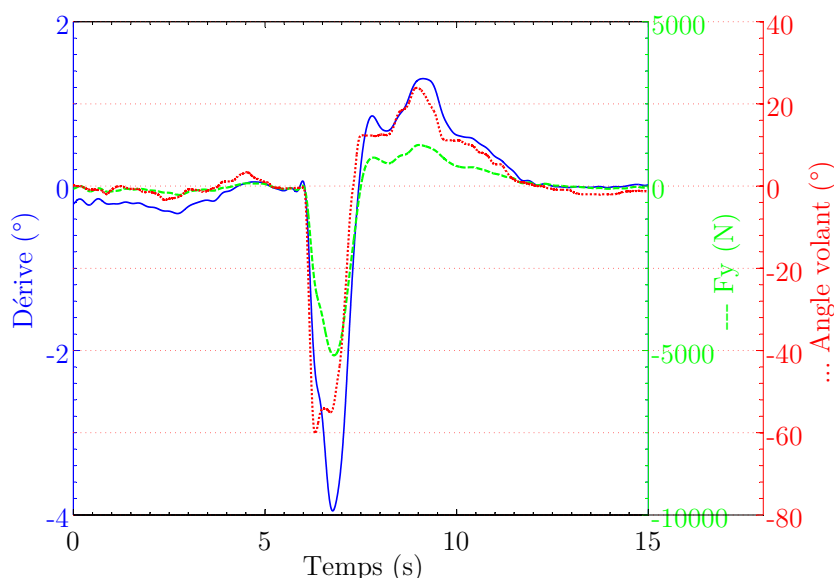


FIGURE 4.17 – Angle volant, dérive et force latérale mesurés dans la 2^{ème} configuration

Après comparaison des courbes de forces latérales mesurées en fonction de la dérive mesurée avec celles des forces latérales estimées en fonction de la dérive mesurée (*cf.* FIGURE 4.18), le constat est semblable à celui effectué précédemment : le modèle dynamique à paramètres variants traduit mieux le phénomène d'hystérésis durant la réponse transitoire que le modèle de Pacejka. Cela se traduit également par une erreur-type sur la force latérale égale à 243,46 N pour le modèle de Pacejka et à 175,17 N pour le modèle PV (PV pour paramètres variants).

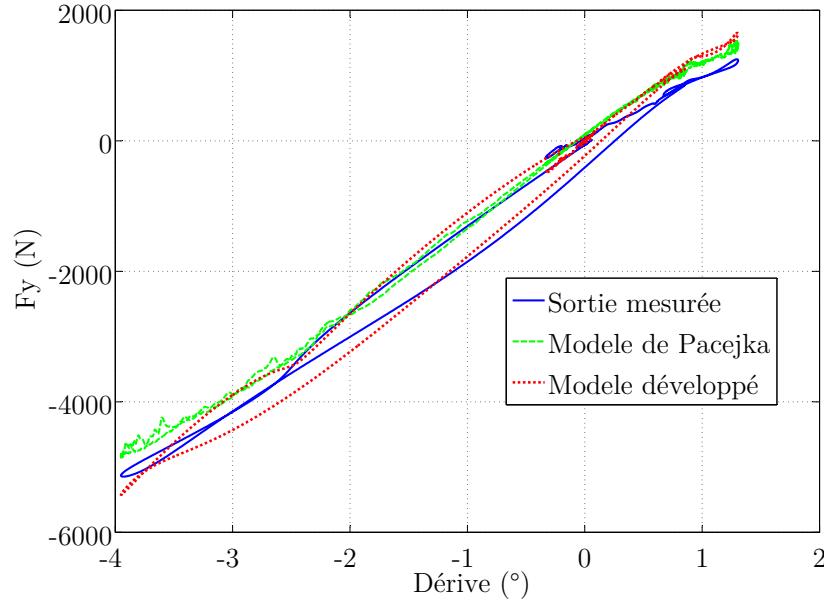


FIGURE 4.18 – Comparaison des courbes des forces latérales en fonction de la dérive mesurée

4.4.1.2 Prise en compte du dévers de route

Le modèle PV a été identifié à partir d'essais sur banc Flat Trac[®] MTS dont la bande de roulement est plane. Par ailleurs, lors des simulations du modèle de Pacejka, le carrossage a été considéré comme nul. En réalité, les pistes d'essais possèdent un dévers (pente transversale d'une chaussée) de l'ordre de 1,5 % soit environ $0,86^\circ$.

Ce dévers crée du carrossage au sol au niveau du pneumatique et ce carrossage est à l'origine d'une force latérale appelée poussée de carrossage ($F_{y\gamma}$). D'après M. WONG [Wong, 2008], il est possible d'expliquer l'origine de cette poussée de la manière suivante : il faut considérer un pneumatique en roulement libre soumis à un angle de carrossage. Ce pneumatique tourne autour du point O (cf. FIGURE 4.19). Si l'on impose un mouvement rectiligne à ce même pneumatique, le point du pneumatique qui entre en contact avec le sol doit suivre cette trajectoire, et une force latérale se crée ainsi. Il s'agit de la poussée de carrossage. Cette poussée dépend de beaucoup de paramètres comme le type de pneumatique, sa pression, sa charge ... [Duysinx, 2010]

Un exemple de l'allure de la poussée de carrossage en fonction de l'angle de carrossage, à dérive nulle et charge verticale constante, est présentée FIGURE 4.20.

Pour de petits angles de carrossage, environ jusqu'à 5° , il est possible d'approcher cette courbe par une droite de pente C_γ (en $N/^\circ$), la raideur de carrossage. Plus précisément, la raideur de carrossage est définie dans la norme ISO8855 : 2011 [ISO, 2011] de la manière suivante :

$$C_\gamma = \left. \frac{\partial F_{y\gamma}}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0} \quad (4.50)$$

Ainsi, comme les simulations précédentes correspondent à une configuration du type « route plane », cette poussée doit être prise en compte dans notre étude. Lors de la procédure d'identi-

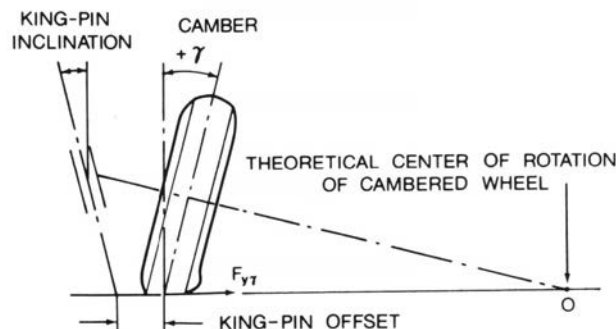


FIGURE 4.19 – Origine de la poussée de carrossage [Wong, 2008]

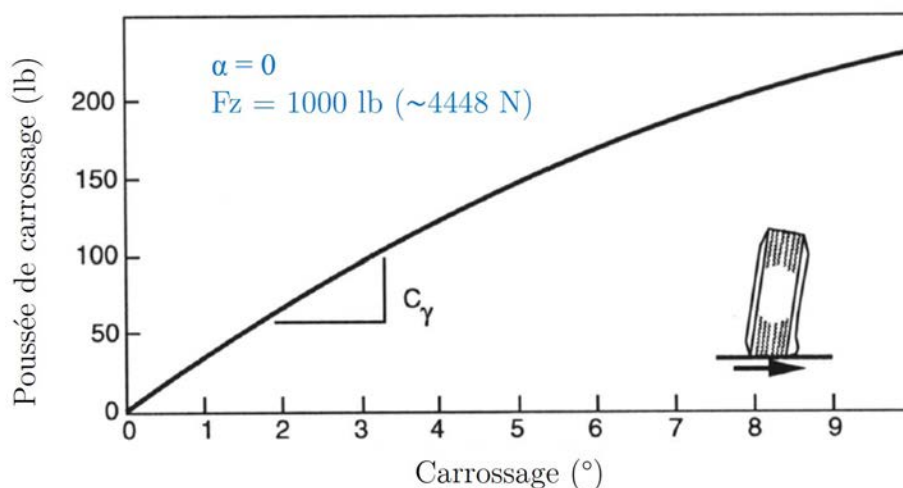


FIGURE 4.20 – Exemple de poussée de carrossage en fonction de l'angle de carrossage [Gillespie, 1992]

fication des pneumatiques effectuée dans l'entreprise Renault, la raideur de carrossage fait partie des paramètres évalués. Le pneumatique utilisé lors de notre étude a donc fait l'objet de cette procédure et les courbes de raideur de carrossage obtenues sont exposées FIGURE 4.21.

En utilisant l'approximation linéaire $F_{y\gamma} = C_\gamma \cdot \gamma$ et connaissant les valeurs de la pente (mesurées) et donc de la raideur de carrossage (par interpolation des données issues de l'identification du pneumatique), la poussée de carrossage est calculée à chaque pas de temps et ajoutée aux forces latérales.

Par exemple, en prenant en compte cette poussée, les courbes F_y /Dérive dans la première configuration (cf. FIGURE 4.16) évoluent comme le montre la FIGURE 4.22.

L'allure de la courbe issue de la simulation du modèle de Pacejka semble reproduire plus fidèlement le comportement réel que précédemment (un peu plus d'hystérésis). En ce qui concerne l'erreur type sur la force latérale, elle vaut 202,5 N (peu d'évolution car sans dévers : 188,57 N) pour le modèle de Pacejka et 123,93 N pour le modèle PV (sans dévers : 173,21 N). La prise en compte du dévers améliore donc les résultats de simulation du modèle PV, ce qui le rend plus prédictif.

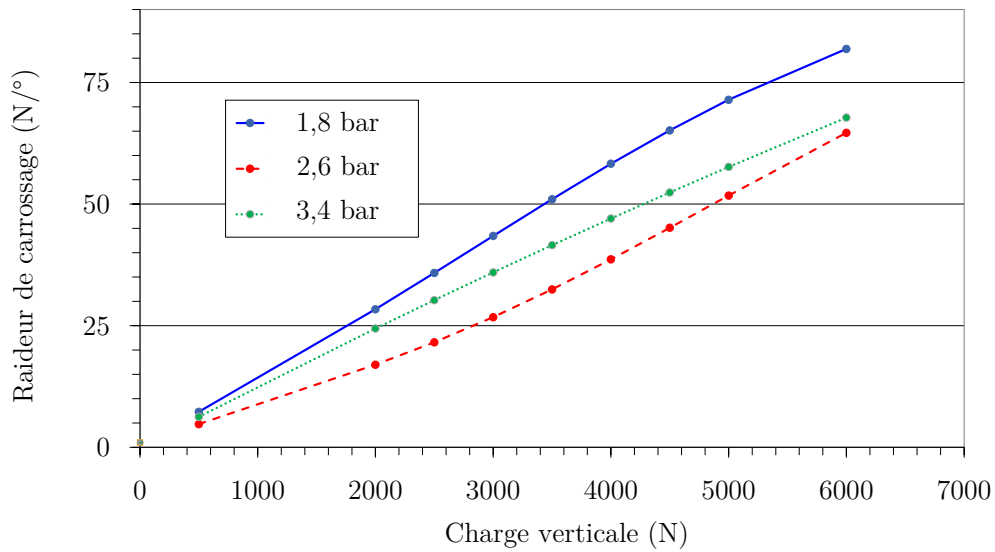


FIGURE 4.21 – Évolution de la raideur de carrossage du pneumatique étudié

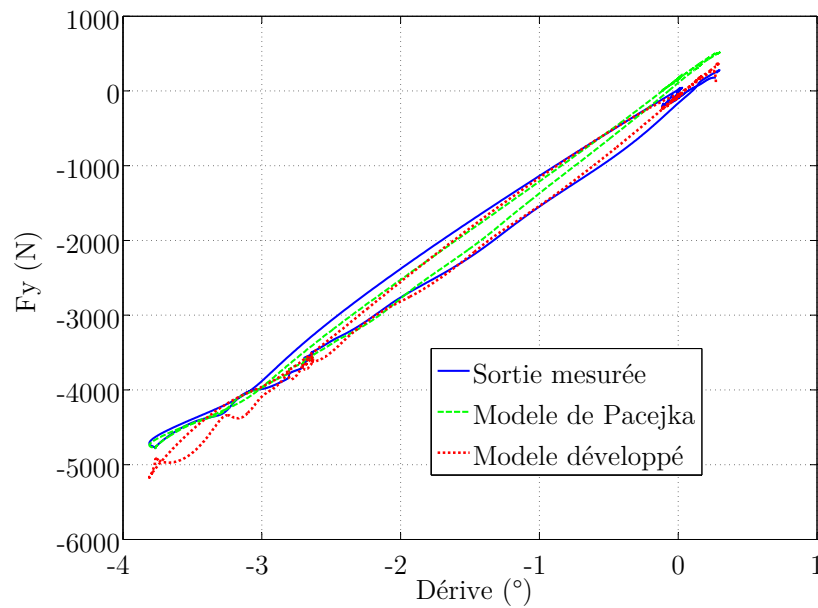


FIGURE 4.22 – Courbes des forces latérales -en prenant en compte le dévers- en fonction de la dérive mesurée

4.4.1.3 Synthèse des résultats

Afin de comparer plus précisément le modèle de Pacejka et le modèle PV, l'erreur-type sur les forces latérales en sortie des modèles est calculée pour chacune des configurations d'essais

présentées (cf. section 4.3.2). Une synthèse des résultats obtenus est proposée TABLE 4.2 .

v_X (km/h)	V_{Volant} (°/s)	Corde	Amplitude F_{yPneu} (N)	Moyenne des RSME F_{yPneu} Pacejka (N)	Moyenne des RSME F_{yPneu} Modèle PV (N)
50	100	droite	2728,36	296,45	186,11
50	100	gauche	1664,78	151,83	127,73
50	200	droite	3056,47	227,74	224,75
50	200	gauche	1854,67	182,47	198,01
50	350	droite	4229,12	168,69	131,81
50	350	gauche	2088,67	170,13	201,48
80	100	droite	3646,69	235,33	188,81
80	100	gauche	1942,69	122,74	156,57
80	200	droite	4107,404	138,06	133,05
80	200	gauche	2059,98	136,73	129,78
80	350	droite	4775,37	180,36	134,17
80	350	gauche	2303,80	144,83	159,04
110	100	droite	2351,52	179,82	108
110	100	gauche	1957,67	209,40	162,02
110	200	droite	2868,63	216,88	184,18
110	200	gauche	2100,23	377,17	266,56
110	350	droite	4374,94	217,27	178,53
110	350	gauche	2242,75	275,07	218,31

TABLE 4.2 – Table des résultats de comparaison simulations / essais

Afin d'éviter de surcharger le tableau de synthèse, pour chaque configuration d'essai comportant trois essais similaires, les erreurs-types ont été moyennées. Par ailleurs, la colonne Amplitude F_{yPneu} caractérise la variation de la force latérale qui correspond au quart de sinus de dérive. Cette amplitude a également été moyennée sur les trois essais similaires afin de fournir des informations quant à l'importance des erreurs-types.

D'un point de vue global, les résultats obtenus avec le modèle PV sont très satisfaisants car les erreurs-types sont faibles et dans 78% des cas il fournit une meilleure estimation que le modèle de Pacejka.

Néanmoins, les sorties du modèle PV en corde à gauche semblent moins précises que celles en corde à droite car les erreurs RSME représentent un plus grand pourcentage de l'amplitude de variation de F_{yPneu} en corde à gauche qu'en corde à droite.

Nous rappelons que la roue mesurée est la roue avant gauche (AVG). Ainsi, en corde à droite, cette roue se charge alors que, en corde à gauche, elle est délestée. Á titre d'exemple, la variation de charge verticale lors d'essais à 80 km/h, 350 °/s, en corde à droite et en corde à gauche est

présentée FIGURE 4.23(a) et 4.23(b). La charge verticale en corde à gauche diminue fortement et atteint 1000 N environ soit moins de 15 % du F_{zETRTO} du pneumatique (cf. section 3.2.1). Cependant, l'identification des paramètres du modèles développé a été réalisée pour une charge supérieure à 40% (cf. TABLE 3.2). Il est donc possible d'expliquer les lacunes du modèle PV en corde à gauche par des bornes trop restrictives de la charge verticale lors de la procédure d'identification.

Afin de confirmer (ou non) ces constations, la seconde partie de la validation est réalisée.

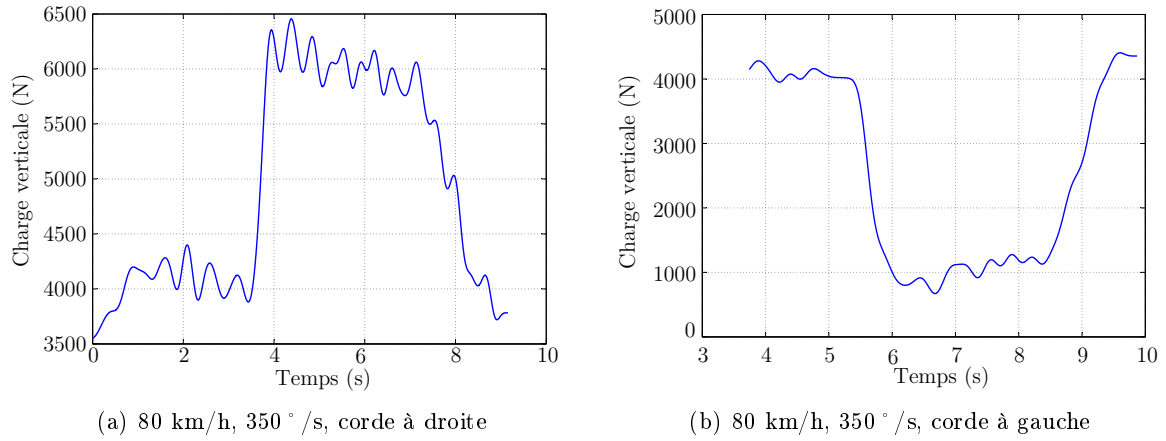


FIGURE 4.23 – Evolution de la charge verticale de la roue AVG en corde à droite et en corde à gauche

4.4.2 Validation du modèle PV couplé au modèle simplifié de véhicule

Le modèle de dynamique automobile utilisé a été présenté section 4.2. Les données d'entrée de ce modèle sont l'angle au volant, le couple moteur et les couples de freinage (cf. FIGURE 4.24) : elles sont renseignées à partir des mesures effectuées lors des essais sur piste.

Il s'agit ici de comparer les sorties du modèle de dynamique automobile couplé au modèle de Pacejka ou au modèle PV, avec les sorties mesurées. Les signaux de sortie étudiés pour les roues AVG et ARG sont les forces latérales, les dérivées ainsi que l'accélération latérale et la vitesse de lacet qui sont deux signaux indispensables au bon fonctionnement de certains systèmes embarqués comme par exemple l'ESP.

Dans le but de rendre cette comparaison la plus pertinente possible, nous nous sommes placés dans le pire des cas, c'est-à-dire une configuration pour laquelle l'erreur RMSE sur F_y obtenue en première phase de validation est une des plus importantes en corde à droite et est supérieure à celle du modèle de Pacejka en corde à gauche. Il s'agit de la configuration suivante : vitesse véhicule 80 km/h, vitesse volant 100 °/s, corde à droite et corde à gauche.

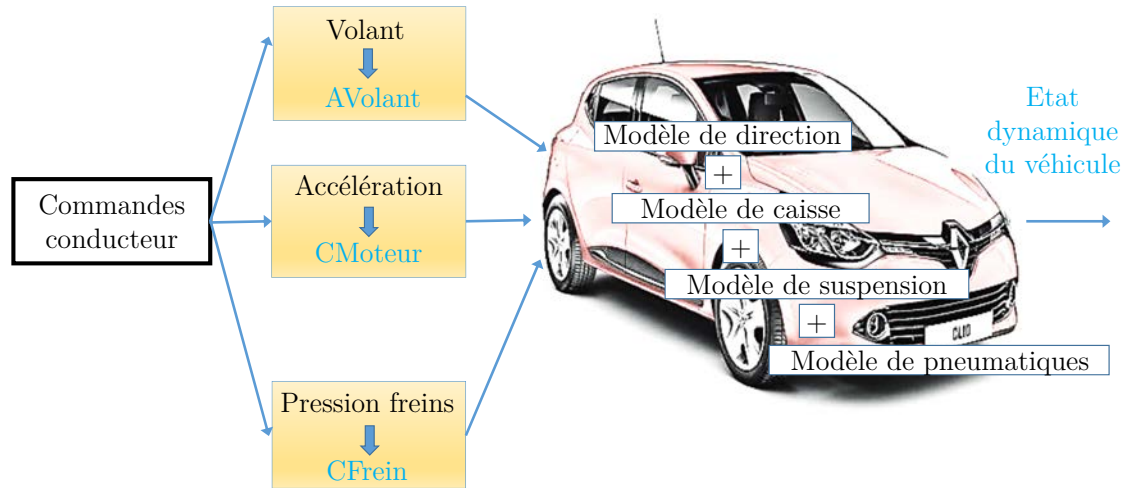


FIGURE 4.24 – Schéma de représentation du simulateur du véhicule

Corde à droite

D'un point de vue général, les sorties estimées (avec les deux modèles de pneumatiques) reproduisent fidèlement la dynamique des signaux mesurés (cf. FIGURE 4.25 à 4.29).

L'estimation des forces latérales avec le modèle PV ou avec le modèle de Pacejka est très satisfaisante pour la roue ARG (cf. FIGURE 4.25) et moins précise avec le modèle de Pacejka pour la roue AVG. Le calcul des erreurs RSME présenté TABLE 4.3 valide ce constat car ce critère vaut environ 140 N pour les deux modèles pour la roue ARG, 190 N pour la roue AVG avec le modèle PV et 289 N avec le modèle de Pacejka. Par ailleurs, il en est de même pour la dérive du pneumatique AVG et celle du pneumatique ARG (cf. FIGURE 4.26). Cela se traduit par des erreurs RSME de l'ordre de $0,11^\circ$ pour la roue ARG, $0,4^\circ$ pour la roue AVG avec le modèle PV et $0,42^\circ$ pour le modèle de Pacejka.

Pour résumer, le modèle dynamique de pneumatique à paramètres variants semble traduire plus précisément l'évolution de la force latérale et de la dérive que le modèle de Pacejka dont les résultats deviennent moins pertinents lorsque la dynamique est plus importante (variation de dérive et de force plus importante).

Les écarts constatés précédemment se répercutent dans le calcul des accélérations transversales et de la vitesse de lacet. L'accélération latérale obtenue avec le modèle PV est très proche de celle mesurée (cf. FIGURE 4.28) contrairement à celle obtenue avec le modèle de Pacejka. L'erreur RSME vaut par ailleurs $0,55 \text{ m/s}^2$ dans le cas du modèle PV et $1,20 \text{ m/s}^2$ dans le cas du modèle de Pacejka. Il en est de même pour la vitesse de lacet (cf. FIGURE 4.29) dont

	RSME AVG $F_{yPneu11}$ (N)	RSME ARG $F_{yPneu21}$ (N)	RSME AVG α_{11} (°)	RSME ARG α_{21} (°)	RSME a_Y (m/s ²)	RSME w_Z (°/s)
Modèle PV	189,86	144,07	0,40	0,11	0,55	1,01
Pacejka	288,92	139,57	0,42	0,11	1,20	2,34

TABLE 4.3 – Erreurs RSME sur les signaux de sortie estimés en corde à droite

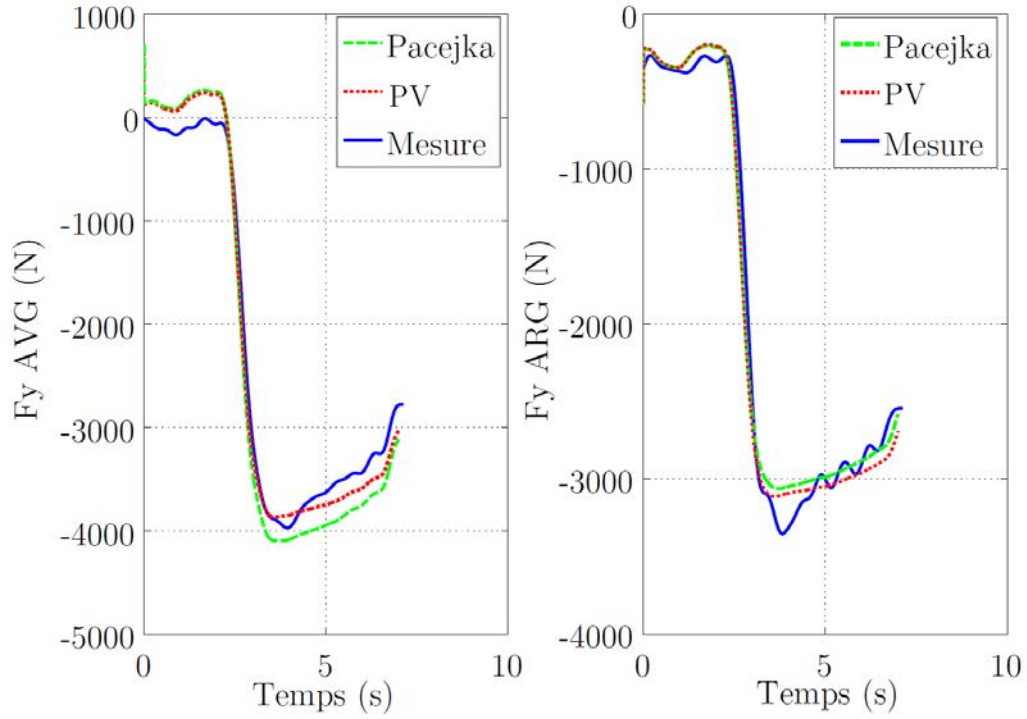


FIGURE 4.25 – Forces latérales mesurées et estimées en corde à droite

l'estimation est plus précise avec le modèle PV (RSME : 1,01 °/s) qu'avec le modèle de Pacejka (RSME : 2,34 °/s).

Pour conclure, les résultats en corde à droite avec le modèle dynamique de pneumatiques à paramètres variants semblent très encourageants car les sorties sont mieux estimées qu'avec le modèle de Pacejka (utilisé habituellement comme référence) et les gains en terme de représentativité de la vitesse de lacet et de l'accélération latérale sont non négligeables.

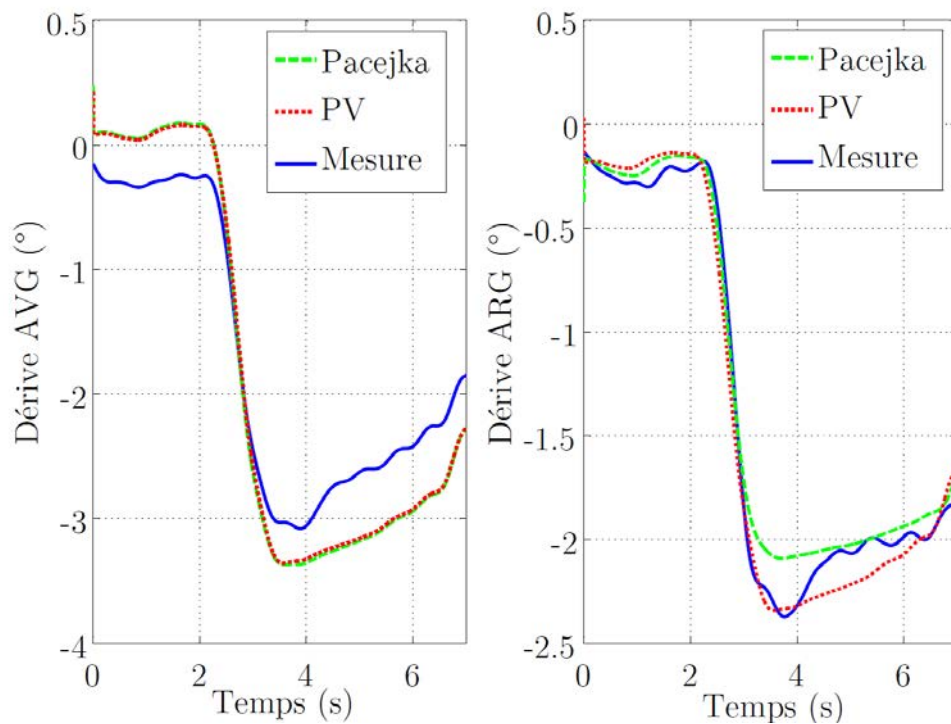


FIGURE 4.26 – Dérives mesurées et estimées en corde à droite

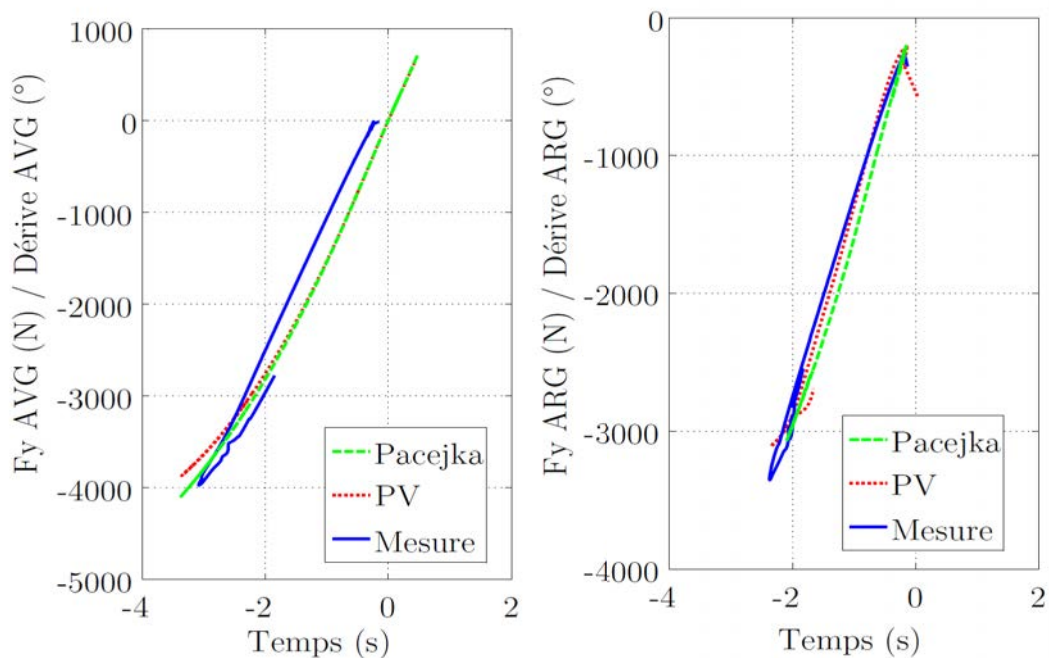


FIGURE 4.27 – F_y/α mesurées et estimées en corde à droite

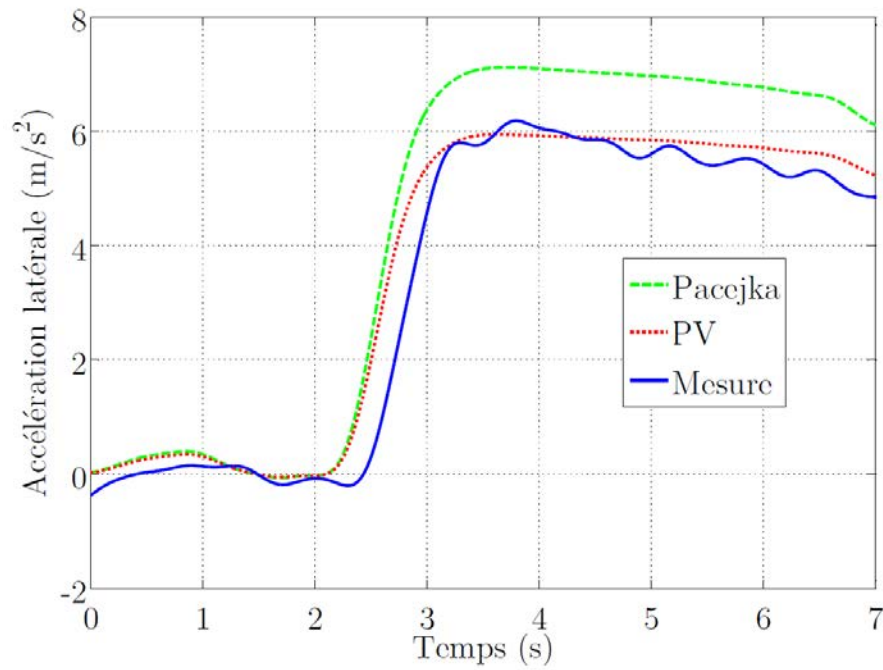


FIGURE 4.28 – Accélérations latérales mesurée et estimées en corde à droite

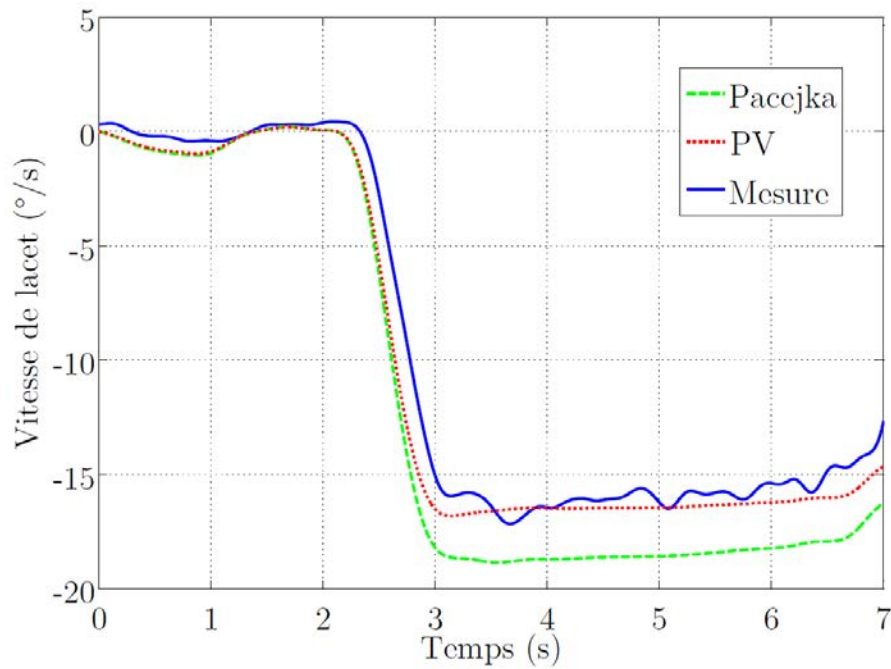


FIGURE 4.29 – Vitesses de lacet mesurée et estimées en corde à droite

Corde à gauche

D'un point de vue général, comme en corde à droite, les sorties estimées (avec les deux modèles de pneumatique) reproduisent fidèlement la dynamique des signaux mesurés (*cf.* FIGURE 4.30 à 4.34).

Cependant, comme constaté lors de la première étape de validation, les résultats obtenus avec le modèle PV en corde à gauche sont moins probants qu'en corde à droite (*cf.* TABLE 4.4).

En effet, les erreurs RSME sur les forces latérales et les dérives sont plus faibles avec le modèle de Pacejka (*cf.* FIGURES 4.30, 4.31 et 4.32) mais les écarts sont faibles. Cela explique ainsi que les différences de RSME sur l'accélération latérale (*cf.* FIGURE 4.33) et la vitesse de lacet (*cf.* 4.34) soient également peu importantes.

Nous pouvons donc penser qu'une meilleure prise en compte des bornes de variation de la charge verticale lors de la phase d'identification du modèle va sensiblement améliorer le calcul de la force latérale en corde à gauche (roue qui se décharge) et de la même manière améliorer l'estimation de la dérive, de l'accélération latérale et de la vitesse de lacet.

	RSME AVG $F_{yPneu_{11}}$ (N)	RSME ARG $F_{yPneu_{21}}$ (N)	RSME AVG α_{11} (°)	RSME ARG α_{21} (°)	RSME a_Y (m/s ²)	RSME w_Z (° /s)
Modèle PV	211,7	181,30	0,31	0,27	0,63	2,51
Pacejka	166,43	141,36	0,30	0,16	0,58	1,95

TABLE 4.4 – RSME sur les signaux de sortie estimés en corde à gauche

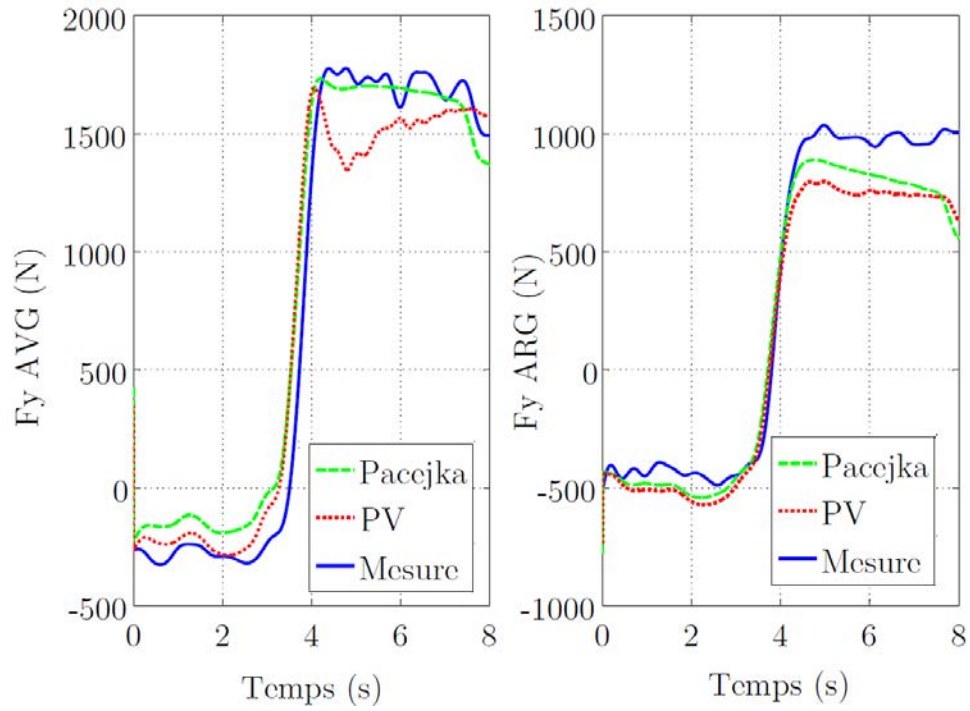


FIGURE 4.30 – Forces latérales estimées et mesurées en corde à gauche

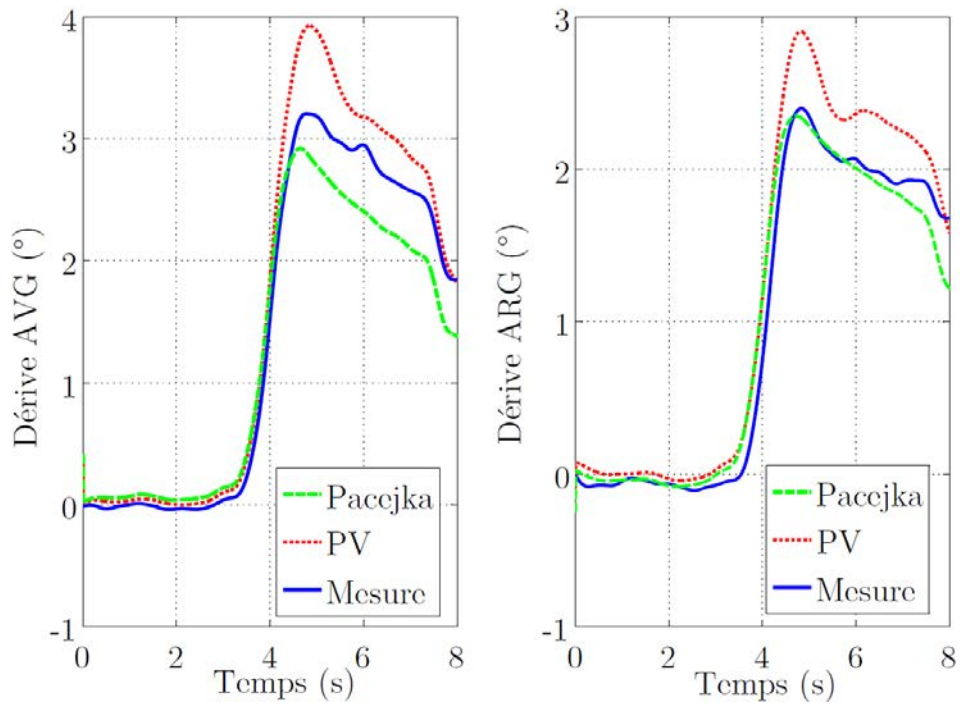


FIGURE 4.31 – Dérives estimées et mesurées en corde à gauche

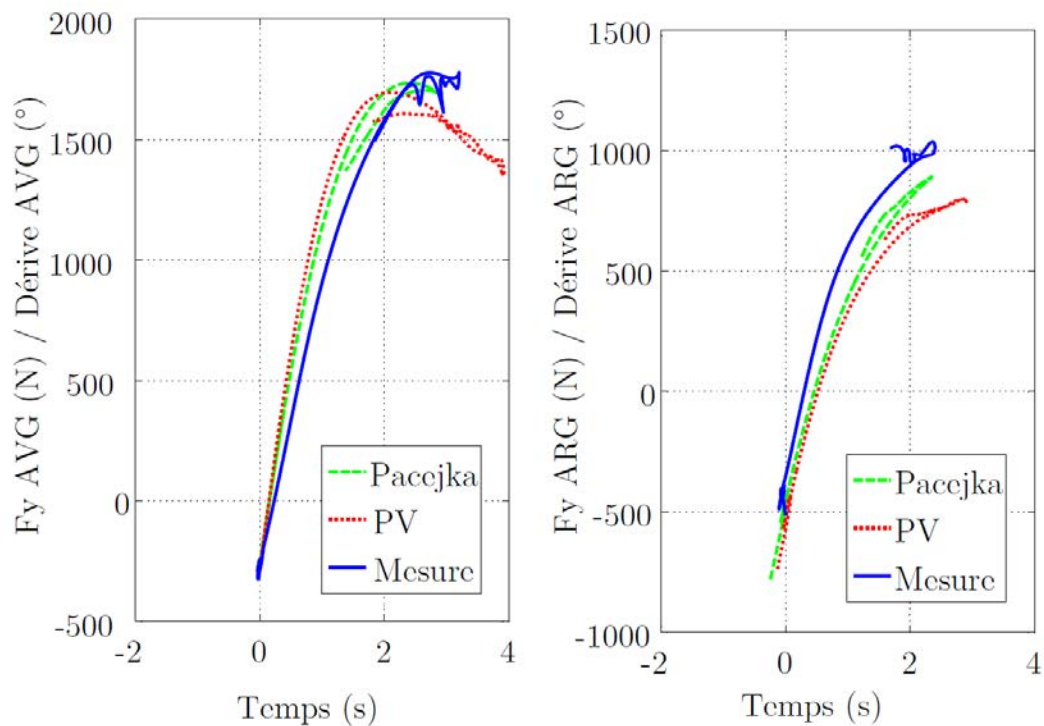


FIGURE 4.32 – F_y/α mesurées et estimées en corde à gauche

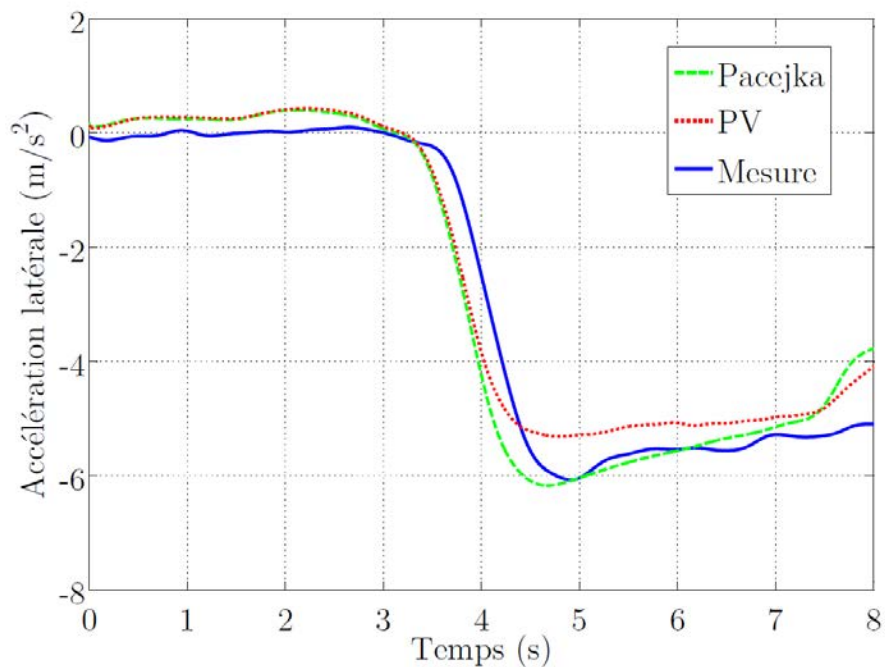


FIGURE 4.33 – Accélérations latérales mesurée et estimées en corde à gauche

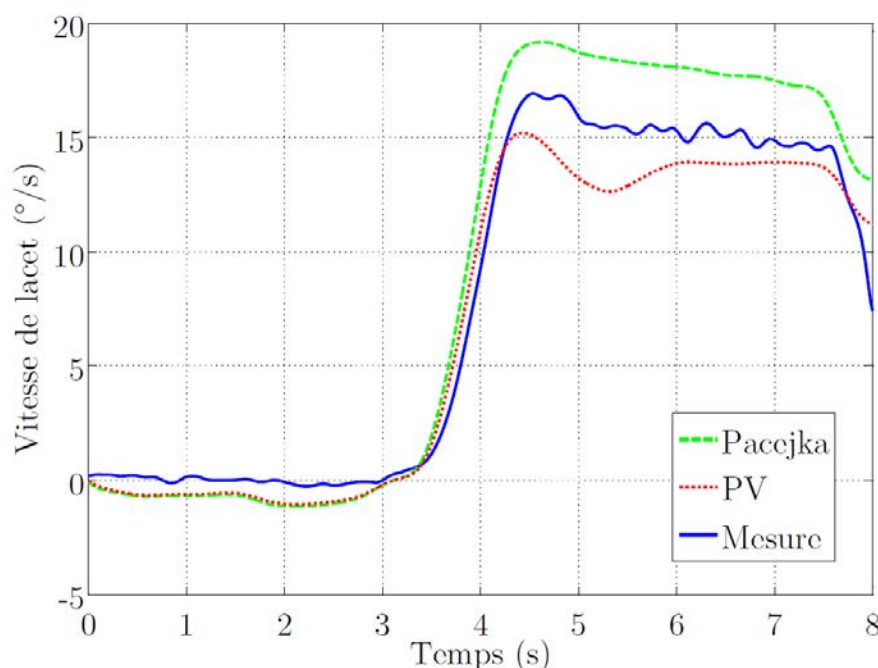


FIGURE 4.34 – Vitesses de lacet mesurée et estimées en corde à gauche

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la validation du modèle dynamique à paramètres variants a été présentée. Pour cela, une première étape de validation dite « directe » a été appliquée. Les estimations obtenues avec ce modèle PV durant cette phase sont très satisfaisantes en corde à droite, et moins satisfaisantes en corde à gauche. Cette différence s'explique par des bornes trop restrictives de la charge verticale durant l'identification des paramètres du modèle. Cette lacune peut donc facilement être corrigée.

La seconde phase de validation fait apparaître des résultats semblables. En effet, en corde à droite, les estimations des forces latérales du modèle PV sont plus précises que celles du modèle de Pacejka, ce qui induit de bonnes estimations de la force latérale, de la vitesse de lacet... En corde à gauche, comme prévu en première phase de validation, le modèle de Pacejka fournit de meilleures estimations que le modèle PV. Néanmoins, les écarts entre les estimations étant faibles, les estimations de l'accélération latérale, de la vitesse de lacet par exemple, sont très proches.

Pour résumer, le modèle PV semble correctement prédire le comportement transitoire du pneumatique et semble ainsi très prometteur. Afin d'identifier ses deux paramètres variants, il est nécessaire de déterminer les modèles d'amplification et de déphasage, qui comportent chacun, pour chaque fréquence, seize coefficients à estimer (avec un plan fractionnaire). Ainsi, la procédure d'identification de ce modèle n'est pas très coûteuse car elle comporte seulement une centaine d'essais (16 essais * 6 fréquences). Il convient cependant de porter une grande attention au domaine de variation des facteurs dans la phase d'identification des paramètres du modèle.

Conclusion et perspectives

La modélisation et la simulation numérique sont, à l'heure actuelle, des outils fondamentaux dans la phase de conception et de développement de systèmes. Les lacunes présentes dans les modèles transitoires de pneumatiques rendent difficile l'usage de la modélisation et de la simulation numérique car la représentativité de la dynamique automobile n'est pas toujours assurée pour certaines situations de conduite. Ces travaux visent une amélioration, par un modèle simple, de la prédiction du comportement transitoire du pneumatique.

Il existe une multitude de modèles transitoires de pneumatiques dans la littérature, dont la plupart utilisent des équations différentielles du premier ou du second ordre pour retranscrire les phénomènes transitoires. Ils font également, très souvent, intervenir des paramètres semi-empiriques mais ne définissent pas la procédure d'identification de ces derniers. Ils demeurent alors très difficiles à évaluer et à mettre au point.

Ces travaux se sont appuyés sur un modèle transitoire de pneumatiques utilisé chez Renault, le modèle dit de Ballant, afin de développer une version améliorée prenant en compte les phénomènes majeurs identifiés.

En effet, l'analyse fréquentielle du pneumatique a révélé que le modèle de Ballant ne traduit pas correctement, « en l'état », le comportement transitoire du pneumatique. Une amélioration de ce modèle a donc été proposée dans ces travaux. Elle consiste à modifier ses paramètres constants, c'est à dire la rigidité de dérive et la raideur latérale. Ces paramètres deviennent des paramètres variants et dépendent ainsi des conditions d'étude.

En outre, les campagnes d'essais sont très souvent longues et coûteuses. L'utilisation de la théorie des plans d'expériences nous a permis d'effectuer le minimum d'essais et d'obtenir le maximum de précision sur les résultats durant la phase d'identification expérimentale des paramètres du modèle développé.

La phase de validation de ce modèle est par ailleurs très encourageante. Les calculs d'erreurs montrent très clairement que les sorties obtenues, en corde droite, avec le modèle modifié de Ballant, sont plus proches des sorties mesurées, que celles calculées avec le modèle de Pacejka. Les résultats, plus mitigés en corde gauche, sont liés au choix trop restrictif du domaine de variation des facteurs d'entrée, lors de la phase d'identification des paramètres variants. Nous disposons ainsi d'un modèle représentatif du comportement transitoire du pneumatique, dont la procédure d'identification des paramètres est une procédure « maîtrisée », qui fixe le choix et le nombre d'essais et évite ainsi des essais inutiles.

À la suite de ces travaux, plusieurs perspectives s'offrent à nous.

Le modèle développé dans ces travaux est un modèle applicable *a posteriori*, car il est nécessaire de connaître la fréquence du signal d'excitation, c'est-à-dire la fréquence du signal de dérive, pour calculer la force latérale à la roue. Il serait donc intéressant d'étendre la validité de ce modèle à des applications temps réelles.

Il existe, chez Renault, une procédure d'essais sur banc Flat Trac[®] qui permet d'identifier les paramètres statiques du pneumatique mesuré. Il serait intéressant d'ajouter à cette procédure les essais liés à l'identification du modèle en régime transitoire afin d'obtenir l'intégralité des informations nécessaires à la modélisation du pneumatique. Il faudrait alors étudier si cette campagne d'essai doit être composée de deux plans d'expériences distincts ou d'un seul plan d'expérience permettant de délivrer l'intégralité des informations nécessaires.

Les modèles de pneumatiques à basse vitesse, indispensables pour la modélisation/simulation des aides à la conduite fonctionnant à basse vitesse comme l'aide au stationnement, possèdent également des lacunes. Ces modèles sont très instables, notamment du fait des calculs du pseudo-glissement et de la dérive qui font intervenir au dénominateur, la vitesse longitudinale au centre roue, qui à très basse vitesse tend vers zéro. Une campagne d'essais basée sur les plans d'expériences pourrait donc être réalisée afin de mettre en avant les paramètres influents lors de ce régime. Une modification du modèle quasi-statique pourrait ainsi être envisagée, en y associant une procédure d'identification adaptée de ses paramètres.

Pour terminer, la prise en compte du comportement transitoire du pneumatique ne peut à elle seule expliquer le comportement transitoire du véhicule au global. La prise en compte de la déformation des trains lors de ce régime est également d'une grande importance. Une étude similaire à celle réalisée dans ces travaux peut-être envisagée sur les trains de véhicule, en effectuant des mesures directes de déformation sur véhicule, notamment par le biais de capteurs à jauges de déformation par exemple.

A

Outils de statistique

Sommaire

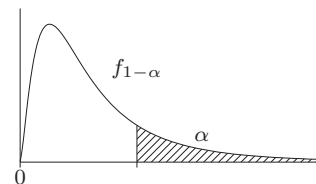
A.1	Lois et table de Fisher-Snedecor ($\alpha = 0,025$)	132
A.2	Lois et table de Fisher-Snedecor ($\alpha = 0,05$)	133
A.3	Lois et table de Student	134

A.1 Lois et table de Fisher-Snedecor ($\alpha = 0,025$)

Si F est une variable aléatoire suivant la loi de Fisher-Snedecor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté, la table donne la valeur $f_{1-\alpha}$ telle que

$$\mathbb{P}\{F \geq f_{1-\alpha}\} = \alpha = 0,025.$$

Ainsi, $f_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha = 0,975$ de la loi de Fisher-Snedecor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté.



$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	648	800	864	900	922	937	957	969	985	993	1 001	1 018
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	8,98	8,84	8,66	8,56	8,46	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,76	6,62	6,43	6,33	6,23	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,60	5,46	5,27	5,17	5,07	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,90	4,76	4,57	4,47	4,36	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,43	4,30	4,10	4,00	3,89	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,10	3,96	3,77	3,67	3,56	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,85	3,72	3,52	3,42	3,31	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,66	3,53	3,33	3,23	3,12	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,51	3,37	3,18	3,07	2,96	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,39	3,25	3,05	2,95	2,84	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,29	3,15	2,95	2,84	2,73	2,49
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,20	3,06	2,86	2,76	2,64	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,12	2,99	2,79	2,68	2,57	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,06	2,92	2,72	2,62	2,50	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,01	2,87	2,67	2,56	2,44	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	2,96	2,82	2,62	2,51	2,39	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	2,91	2,77	2,57	2,46	2,35	2,09
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,84	2,70	2,50	2,39	2,27	2,00
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,78	2,64	2,44	2,33	2,21	1,94
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,73	2,59	2,39	2,28	2,16	1,88
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,69	2,55	2,34	2,23	2,11	1,83
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,65	2,51	2,31	2,20	2,07	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,53	2,39	2,18	2,07	1,94	1,64
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,46	2,32	2,11	1,99	1,87	1,55
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,41	2,27	2,06	1,94	1,82	1,48
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,36	2,21	2,00	1,88	1,75	1,40
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,32	2,18	1,97	1,85	1,71	1,35
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,19	2,05	1,83	1,71	1,57	1,00

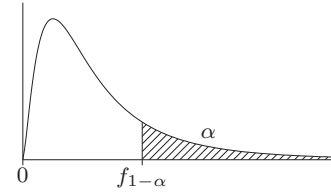
A.2 Lois et table de Fisher-Snedecor ($\alpha = 0,05$)

Lois de Fisher-Snedecor ($\alpha = 0,05$)

Si F est une variable aléatoire suivant la loi de Fisher-Snedecor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté, la table donne la valeur $f_{1-\alpha}$ telle que

$$\mathbb{P}\{F \geq f_{1-\alpha}\} = \alpha = 0,05.$$

Ainsi, $f_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha = 0,95$ de la loi de Fisher-Snedecor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté.



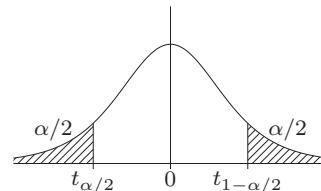
$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246	248	250	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,85	2,72	2,65	2,57	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,62	2,54	2,47	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,67	2,53	2,46	2,38	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,19	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,45	2,31	2,23	2,15	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,38	2,23	2,16	2,07	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07	1,98	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,25	2,11	2,03	1,94	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99	1,90	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,19	2,04	1,96	1,87	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	2,03	1,87	1,78	1,69	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65	1,39
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,95	1,79	1,70	1,60	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,03	1,93	1,77	1,68	1,57	1,28
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,83	1,67	1,57	1,46	1,00

A.3 Lois et table de Student

Si T est une variable aléatoire suivant la loi de Student à ν degrés de liberté, la table donne, pour α fixé, la valeur $t_{1-\alpha/2}$ telle que

$$\mathbb{P}\{|T| \geq t_{1-\alpha/2}\} = \alpha.$$

Ainsi, $t_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi de Student à ν degrés de liberté.



$\nu \backslash \alpha$	0,900	0,500	0,300	0,200	0,100	0,050	0,020	0,010	0,001
1	0,1584	1,0000	1,9626	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6193
2	0,1421	0,8165	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	0,1366	0,7649	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,9240
4	0,1338	0,7407	1,1896	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	0,1322	0,7267	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	0,1311	0,7176	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	0,1303	0,7111	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	0,1297	0,7064	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	0,1293	0,7027	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	0,1289	0,6998	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	0,1286	0,6974	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	0,1283	0,6955	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	0,1281	0,6938	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	0,1280	0,6924	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	0,1278	0,6912	1,0735	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	0,1277	0,6901	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	0,1276	0,6892	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	0,1274	0,6884	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	0,1274	0,6876	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	0,1273	0,6870	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	0,1272	0,6864	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	0,1271	0,6858	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	0,1271	0,6853	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	0,1270	0,6848	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	0,1269	0,6844	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	0,1269	0,6840	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	0,1268	0,6837	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	0,1268	0,6834	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	0,1268	0,6830	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	0,1267	0,6828	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
40	0,1265	0,6807	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
60	0,1262	0,6786	1,0455	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
80	0,1261	0,6776	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
120	0,1259	0,6765	1,0409	1,2886	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735
∞	0,1257	0,6745	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,2905

Lorsque $\nu = \infty$, $t_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

B

Modèle de Pacejka et ses paramètres

Paramètres MF-Tyre

x: required parameter

(x): optional parameter

Tyre property file			MF-Tyre 6.1		MF-Swift 6.1		MF-Tyre 6.0		MF-Swift 6.0		MF-Tyre 5.2		SWIFT 1.2		MF-MCTyre 1.1	
[MODEL]																
FITTP		Magic Formula version number	61	61			60	60			6	21		52		
TYRESIDE		Position of tyre during measurements	x	x			x	x			x	x		x		
LONGVL		Reference speed	x	x			x	x			x	x		x		
VXLOW		Lower boundary velocity in slip calculation	x	x			x	x			x	x		x		
ROAD_INCREMENT		Increment in road sampling			x				x			x				
ROAD_DIRECTION		Direction of travelled distance			x				x			x				
PROPERTY_FILE_FORMAT		Tyre model selection (ADAMS only)	x	x			x	x			x	x		x		
USE_MODE		Tyre use mode switch (ADAMS only)	x	x			x	x			x	x		x		
HMAX_LOCAL		Local integration time step (ADAMS only)			x				x			x				
TIME_SWITCH_INTEG		Time when local integrator is activated (ADAMS only)			x				x			x				
[DIMENSION]																
UNLOADED_RADIUS		Free tyre radius	x	x			x	x			x	x		x		
WIDTH		Nominal section width of the tyre	x	x			x	x			x	x		x		
RIM_RADIUS		Nominal rim radius	x	x			x	x			x	x		x		
RIM_WIDTH		Rim width	x	x			x	x			x	x		x		
ASPECT_RATIO		Nominal aspect ratio	x	x			x	x			x	x		x		
[OPERATING_CONDITIONS]																
INFLPRES		Tyre inflation pressure	x	x												
NOMPRES		Nominal pressure used in (MF) equations	x	x												
[INERTIA]																
MASS		Tyre mass	x	x			x	x				x				
IXX		Tyre diametral moment of inertia	x	x			x	x								
IYY		Tyre polar moment of inertia	x	x			x	x								
BELT_MASS		Belt mass			x				x							
BELT_IXX		Belt diametral moment of inertia			x				x							
BELT_IYY		Belt polar moment of inertia			x				x							
GRAVITY		Gravity acting on belt in Z direction			x				x							
M_B		Portion of tyre mass of tyre belt part											x			
I_BY		Normalized moment of inertia about Y of tyre belt part											x			
I_BXZ		Normalized moment of inertia about XZ of tyre belt part											x			
C_GRV		Gravity constant											x			
[VERTICAL]																
FNOMIN		Nominal wheel load	x	x			x	x			x	x		x		

Tyre property file		MF-Tyre 6.1	MF-Swift 6.1	MF-Tyre 6.0	MF-Swift 6.0	MF-Tyre 5.2	SWIFT 1.2	MF-MCTyre 1.1
VERTICAL_STIFFNESS	Tyre vertical stiffness	x	x	x	x	x	x	x
VERTICAL_DAMPING	Tyre vertical damping	x	x	x	x	x	x	x
MC_CONTOUR_A	Motorcycle contour ellipse A	x						
MC_CONTOUR_B	Motorcycle contour ellipse B	x						
BREFF	Low load stiffness of effective rolling radius	x	x	x	x	x	x	x
DREFF	Peak value of effective rolling radius	x	x	x	x	x	x	x
FREFF	High load stiffness of effective rolling radius	x	x	x	x	x	x	x
Q_RE0	Ratio of free tyre radius with nominal tyre radius	x	x	x	x			
Q_V1	Tyre radius increase with speed	x	x	x	x			
Q_V2	Vertical stiffness increase with speed	x	x	x	x			
Q_FZ2	Quadratic term in load vs. deflection	x	x	x	x			
Q_FCX	Longitudinal force influence on vertical stiffness	x	x	x	x			
Q_FCY	Lateral force influence on vertical stiffness	x	x	x	x			
Q_CAM	Stiffness reduction due to camber	x						
PFZ1	Pressure effect on vertical stiffness	x	x					
BOTTOM_OFFST	Distance to rim when bottoming starts to occur	x	x	x	x			
BOTTOM_STIFF	Vertical stiffness of bottomed tyre	x	x	x	x			
[STRUCTURAL]								
LONGITUDINAL_STIFFNESS	Tyre overall longitudinal stiffness	x	x	x	x			
LATERAL_STIFFNESS	Tyre overall lateral stiffness	x	x	x	x			
YAW_STIFFNESS	Tyre overall yaw stiffness	x	x	x	x			
FREQ_LONG	Undamped frequency fore/aft and vertical mode		x		x			
FREQ_LAT	Undamped frequency lateral mode		x		x			
FREQ_YAW	Undamped frequency yaw and camber mode		x		x			
FREQ_WINDUP	Undamped frequency wind-up mode		x		x			
DAMP_LONG	Dimensionless damping fore/aft and vertical mode		x		x			
DAMP_LAT	Dimensionless damping lateral mode		x		x			
DAMP_YAW	Dimensionless damping yaw and camber mode		x		x			
DAMP_WINDUP	Dimensionless damping wind-up mode		x		x			
DAMP_RESIDUAL	Residual damping (proportional to stiffness)	x	x	x	x			
DAMP_VLOW	Additional low speed damping (proportional to stiffness)	x	x	x	x			
Q_BVX	Load and speed influence on in-plane translation stiffness		x		x			
Q_BVT	Load and speed influence on in-plane rotation stiffness		x		x			
PCFX1	Tyre overall longitudinal stiffness vertical deflection dependency linear term	x	x					
PCFX2	Tyre overall longitudinal stiffness vertical deflection dependency quadratic term	x	x					
PCFX3	Tyre overall longitudinal stiffness pressure dependency	x	x					
PCFY1	Tyre overall lateral stiffness vertical deflection dependency linear term	x	x					
PCFY2	Tyre overall lateral stiffness vertical deflection dependency quadratic term	x	x					
PCFY3	Tyre overall lateral stiffness pressure dependency	x	x					
PCMZ1	Tyre overall yaw stiffness pressure dependency	x	x					
C_BX0	In-plane belt translation stiffness							
C_RX	Longitudinal residual stiffness							
C_BT0	In-plane belt rotation stiffness							
C_BY	Out-of-plane belt translation stiffness							
C_RY	Lateral residual stiffness							
C_BGAM	Out-of-plane belt rotation stiffness							
C_RP	Yaw residual stiffness							
K_BX	In-plane belt translation damping							

Tyre property file		MF-Tyre 6.1	MF-Swift 6.1	MF-Tyre 6.0	MF-Swift 6.0	MF-Tyre 5.2	SWIFT 1.2	MF-MCTyre 1.1
K_BT	In-plane belt rotation damping						x	
K_BY	Out-of-plane belt translation damping						x	
K_BGAM	Out-of-plane belt rotation damping						x	
[CONTACT_PATCH]								
Q_RA1	Square root term in contact length equation	x						
Q_RA2	Linear term in contact length equation	x						
Q_RB1	Root term in contact width equation	x						
Q_RB2	Linear term in contact width equation	x						
ELLIPS_SHIFT	Scaling of distance between front and rear ellipsoid	x		x		x		
ELLIPS_LENGTH	Semimajor axis of ellipsoid	x		x		x		
ELLIPS_HEIGHT	Semiminor axis of ellipsoid	x		x		x		
ELLIPS_ORDER	Order of ellipsoid	x		x		x		
ELLIPS_MAX_STEP	Maximum height of road step	x		x		x		
ELLIPS_NWIDTH	Number of parallel ellipsoids	x		x		x		
ELLIPS_NLENGTH	Number of ellipsoids at sides of contact patch	x		x		x		
Q_A2	Linear load term in contact length			x		x		
Q_A1	Square root load term in contact length			x		x		
ELLIPS_INC	Discretisation increment of ellipsoid contour			x		x		
Q_LBF	Length of basic function			x		x		
Q_LOS1	Basic function offset threshold			x		x		
Q_LOS2	Basic function offset scaling factor with basic function length			x		x		
Q_LIMP1	Linear contact length term in basic function shift			x		x		
Q_LIMP3	Scaling factor for quasi-static longitudinal enveloping force			x				
Q_LIMP4	Scaling factor for dynamic longitudinal enveloping force			x				
Q_LIMP2	Quadratic contact length term in basic function shift						x	
[INFLATION_PRESSURE_RANGE]								
PRESMIN	Minimum allowed inflation pressure	x	x					
PRESMAX	Maximum allowed inflation pressure	x	x					
[VERTICAL_FORCE_RANGE]								
FZMIN	Minimum allowed wheel load	x	x	x	x	x	x	x
FZMAX	Maximum allowed wheel load	x	x	x	x	x	x	x
[LONG_SLIP_RANGE]								
KPUMIN	Minimum valid wheel slip	x	x	x	x	x	x	x
KPUMAX	Maximum valid wheel slip	x	x	x	x	x	x	x
[SLIP_ANGLE_RANGE]								
ALPMIN	Minimum valid slip angle	x	x	x	x	x	x	x
ALPMAX	Maximum valid slip angle	x	x	x	x	x	x	x
[INCLINATION_ANGLE_RANGE]								
CAMMIN	Minimum valid camber angle	x	x	x	x	x	x	x
CAMMAX	Maximum valid camber angle	x	x	x	x	x	x	x
[SCALING_COEFFICIENTS]								
LFZO	Scale factor of nominal (rated) load	x	x	x	x	x	x	x

Tyre property file		MF-Tyre 6.1	MF-Swift 6.1	MF-Tyre 6.0	MF-Swift 6.0	MF-Tyre 5.2	SWIFT 1.2	MF-MCTyre 1.1
LCX	Scale factor of Fx shape factor	x	x	x	x	x	x	x
LMUX	Scale factor of Fx peak friction coefficient	x	x	x	x	x	x	x
LEX	Scale factor of Fx curvature factor	x	x	x	x	x	x	x
LKX	Scale factor of slip stiffness	x	x	x	x	x	x	x
LHX	Scale factor of Fx horizontal shift	x	x	x	x	x	x	
LVX	Scale factor of Fx vertical shift	x	x	x	x	x	x	x
LCY	Scale factor of Fy shape factor	x	x	x	x	x	x	x
LMUY	Scale factor of Fy peak friction coefficient	x	x	x	x	x	x	x
LEY	Scale factor of Fy curvature factor	x	x	x	x	x	x	x
LKY	Scale factor of cornering stiffness	x	x	x	x	x	x	x
LKYC	Scale factor of camber stiffness	x	x	x	x			
LKZC	Scale factor of camber moment stiffness	x	x	x	x			
LHY	Scale factor of Fy horizontal shift	x	x	x	x	x	x	x
LVY	Scale factor of Fy vertical shift	x	x	x	x	x	x	
LTR	Scale factor of Peak of pneumatic trail	x	x	x	x	x	x	x
LRES	Scale factor for offset of residual torque	x	x	x	x	x	x	x
LXAL	Scale factor of alpha influence on Fx	x	x	x	x	x	x	x
LYKA	Scale factor of alpha influence on Fx	x	x	x	x	x	x	x
LVYKA	Scale factor of kappa induced Fy	x	x	x	x	x	x	x
LS	Scale factor of Moment arm of Fx	x	x	x	x	x	x	x
LMX	Scale factor of overturning moment	x	x	x	x	x	x	x
LVMX	Scale factor of Mx vertical shift	x	x	x	x	x	x	x
LMY	Scale factor of rolling resistance torque	x	x	x	x	x	x	x
LMP	Scale factor of parking moment	x	x	x	x			
LKC	Scale factor of camber stiffness							x
LCC	Scale factor of camber shape factor							x
LEC	Scale factor of camber curvature factor							x
LSGKP	Scale factor of Relaxation length of Fx					x	x	x
LSGAL	Scale factor of Relaxation length of Fy					x	x	x
LGYR	Scale factor gyroscopic moment					x	x	x
[LONGITUDINAL_COEFFICIENTS]								
PCX1	Shape factor Cfx for longitudinal force	x	x	x	x	x	x	x
PDX1	Longitudinal friction Mux at Fznom	x	x	x	x	x	x	x
PDX2	Variation of friction Mux with load	x	x	x	x	x	x	x
PDX3	Variation of friction Mux with camber	x	x	x	x	x	x	x
PEX1	Longitudinal curvature Efx at Fznom	x	x	x	x	x	x	x
PEX2	Variation of curvature Efx with load	x	x	x	x	x	x	x
PEX3	Variation of curvature Efx with load squared	x	x	x	x	x	x	x
PEX4	Factor in curvature Efx while driving	x	x	x	x	x	x	x
PKX1	Longitudinal slip stiffness Kfx/Fz at Fznom	x	x	x	x	x	x	x
PKX2	Variation of slip stiffness Kfx/Fz with load	x	x	x	x	x	x	x
PKX3	Exponent in slip stiffness Kfx/Fz with load	x	x	x	x	x	x	x
PHX1	Horizontal shift Shx at Fznom	x	x	x	x	x	x	
PHX2	Variation of shift Shx with load	x	x	x	x	x	x	
PVX1	Vertical shift Svz/Fz at Fznom	x	x	x	x	x	x	x
PVX2	Variation of shift Svz/Fz with load	x	x	x	x	x	x	x
RBX1	Slope factor for combined slip Fx reduction	x	x	x	x	x	x	x
RBX2	Variation of slope Fx reduction with kappa	x	x	x	x	x	x	x

Tyre property file		MF-Tyre 6.1	MF-Swift 6.1	MF-Tyre 6.0	MF-Swift 6.0	MF-Tyre 5.2	SWIFT 1.2	MF-MCTyre 1.1
RBX3	Influence of camber on stiffness for Fx combined	x	x	x	x			x
RCX1	Shape factor for combined slip Fx reduction	x	x	x	x	x	x	x
REX1	Curvature factor of combined Fx	x	x	x	x	x	x	x
REX2	Curvature factor of combined Fx with load	x	x	x	x	x	x	x
RHX1	Shift factor for combined slip Fx reduction	x	x	x	x	x	x	x
PPX1	Linear pressure effect on slip stiffness	x	x					
PPX2	Quadratic pressure effect on slip stiffness	x	x					
PPX3	Linear pressure effect on longitudinal friction	x	x					
PPX4	Quadratic pressure effect on longitudinal friction	x	x					
PTX1	Relaxation length SigKap0/Fz at Fznom					x	x	x
PTX2	Variation of SigKap0/Fz with load					x	x	x
PTX3	Variation of SigKap0/Fz with exponent of load					x	x	x
[OVERTURNING_COEFFICIENTS]								
QSX1	Overturning moment offset	x	x	x	x	x	x	x
QSX2	Camber induced overturning couple	x	x	x	x	x	x	x
QSX3	Fy induced overturning couple	x	x	x	x	x	x	x
QSX4	Mixed load, lateral force and camber on Mx	x	x	x	x			
QSX5	Load effect on Mx with lateral force and camber	x	x	x	x			
QSX6	B-factor of load with Mx	x	x	x	x			
QSX7	Camber with load on Mx	x	x	x	x			
QSX8	Lateral force with load on Mx	x	x	x	x			
QSX9	B-factor of lateral force with load on Mx	x	x	x	x			
QSX10	Vertical force with camber on Mx	x	x	x	x			
QSX11	B-factor of vertical force with camber on Mx	x	x	x	x			
QSX12	Camber squared induced overturning moment	x	x					
QSX13	Lateral force induced overturning moment	x	x					
QSX14	Lateral force induced overturning moment with camber	x	x					
PPMX1	Influence of inflation pressure on overturning moment	x	x					
[LATERAL_COEFFICIENTS]								
PCY1	Shape factor Cfy for lateral forces	x	x	x	x	x	x	x
PDY1	Lateral friction Muy	x	x	x	x	x	x	x
PDY2	Variation of friction Muy with load	x	x	x	x	x	x	x
PDY3	Variation of friction Muy with squared camber	x	x	x	x	x	x	x
PEY1	Lateral curvature Efy at Fznom	x	x	x	x	x	x	x
PEY2	Variation of curvature Efy with load	x	x	x	x	x	x	x
PEY3	Zero order camber dependency of curvature Efy	x	x	x	x	x	x	x
PEY4	Variation of curvature Efy with camber	x	x	x	x	x	x	x
PEY5	Camber curvature Efc	x	x	x	x			x
PKY1	Maximum value of stiffness Kfy/Fznom	x	x	x	x	x	x	x
PKY2	Load at which Kfy reaches maximum value	x	x	x	x	x	x	x
PKY3	Variation of Kfy/Fznom with camber	x	x	x	x	x	x	x
PKY4	Peak stiffness variation with camber squared	x	x	x	x			x
PKY5	Lateral stiffness dependency with camber	x	x	x	x			x
PKY6	Camber stiffness factor	x	x	x	x			x
PKY7	Load dependency of camber stiffness factor	x	x	x	x			x
PHY1	Horizontal shift Shy at Fznom	x	x	x	x	x	x	x
PHY2	Variation of shift Shy with load	x	x	x	x	x	x	

Tyre property file		MF-Tyre 6.1	MF-Swift 6.1	MF-Tyre 6.0	MF-Swift 6.0	MF-Tyre 5.2	SWIFT 1.2	MF-MCTyre 1.1
PVY1	Vertical shift in Svy/Fz at Fznom	x	x	x	x	x	x	
PVY2	Variation of shift Svy/Fz with load	x	x	x	x	x	x	
PVY3	Variation of shift Svy/Fz with camber	x	x	x	x	x	x	
PVY4	Variation of shift Svy/Fz with camber and load	x	x	x	x	x	x	
RBV1	Slope factor for combined Fy reduction	x	x	x	x	x	x	x
RBV2	Variation of slope Fy reduction with alpha	x	x	x	x	x	x	x
RBV3	Shift term for alpha in slope Fy reduction	x	x	x	x	x	x	x
RBV4	Influence of camber on stiffness of Fy combined	x	x	x	x			x
RCY1	Shape factor for combined Fy reduction	x	x	x	x	x	x	x
REY1	Curvature factor of combined Fy	x	x	x	x	x	x	x
REY2	Curvature factor of combined Fy with load	x	x	x	x	x	x	x
RHY1	Shift factor for combined Fy reduction	x	x	x	x	x	x	x
RHY2	Shift factor for combined Fy reduction with load	x	x	x	x	x	x	x
RVY1	Kappa induced side force Svyk/Muy*Fz at Fznom	x	x	x	x	x	x	x
RVY2	Variation of Svyk/Muy*Fz with load	x	x	x	x	x	x	x
RVY3	Variation of Svyk/Muy*Fz with camber	x	x	x	x	x	x	x
RVY4	Variation of Svyk/Muy*Fz with alpha	x	x	x	x	x	x	x
RVY5	Variation of Svyk/Muy*Fz with kappa	x	x	x	x	x	x	x
RVY6	Variation of Svyk/Muy*Fz with atan(kappa)	x	x	x	x	x	x	x
PPY1	Pressure effect on cornering stiffness magnitude	x	x					
PPY2	Pressure effect on location of cornering stiffness peak	x	x					
PPY3	Linear pressure effect on lateral friction	x	x					
PPY4	Quadratic pressure effect on lateral friction	x	x					
PPY5	Influence of inflation pressure on camber stiffness	x	x					
PCY2	Shape factor Cfc for camber forces							x
PHY3	Variation of shift Shy with camber					x	x	
PTY1	Peak value of relaxation length SigAlp0/R0					x	x	x
PTY2	Value of Fz/Fznom where SigAlp0 is extreme					x	x	x
PTY3	Value of Fz/Fznom where Sig_alpha is maximum							x
[ROLLING_COEFFICIENTS]								
QSY1	Rolling resistance torque coefficient	x	x	x	x	x	x	x
QSY2	Rolling resistance torque depending on Fx	x	x	x	x	x	x	x
QSY3	Rolling resistance torque depending on speed	x	x	x	x	x	x	x
QSY4	Rolling resistance torque depending on speed ^4	x	x	x	x	x	x	x
QSY5	Rolling resistance torque depending on camber squared	x	x					
QSY6	Rolling resistance torque depending on load and camber squared	x	x					
QSY7	Rolling resistance torque coefficient load dependency	x	x					
QSY8	Rolling resistance torque coefficient pressure dependency	x	x					
[ALIGNING_COEFFICIENTS]								
QBZ1	Trail slope factor for trail Bpt at Fznom	x	x	x	x	x	x	x
QBZ2	Variation of slope Bpt with load	x	x	x	x	x	x	x
QBZ3	Variation of slope Bpt with load squared	x	x	x	x	x	x	x
QBZ4	Variation of slope Bpt with camber	x	x	x	x	x	x	x
QBZ5	Variation of slope Bpt with absolute camber	x	x	x	x	x	x	x
QBZ9	Slope factor Br of residual torque Mzr	x	x	x	x	x	x	x
QBZ10	Slope factor Br of residual torque Mzr	x	x	x	x	x	x	x
QCZ1	Shape factor Cpt for pneumatic trail	x	x	x	x	x	x	x

Tyre property file		MF-Tyre 6.1	MF-Swift 6.1	MF-Tyre 6.0	MF-Swift 6.0	MF-Tyre 5.2	SWIFT 1.2	MF-MCTyre 1.1
QDZ1	Peak trail $D_{pt}'' = D_{pt}'(F_z/F_{znom} \cdot R_0)$	x	x	x	x	x	x	x
QDZ2	Variation of peak D_{pt} with load	x	x	x	x	x	x	x
QDZ3	Variation of peak D_{pt} with camber	x	x	x	x	x	x	x
QDZ4	Variation of peak D_{pt} with camber squared	x	x	x	x	x	x	x
QDZ6	Peak residual torque $D_{mr} = D_{mr}'(F_z \cdot R_0)$	x	x	x	x	x	x	x
QDZ7	Variation of peak factor D_{mr} with load	x	x	x	x	x	x	x
QDZ8	Variation of peak factor D_{mr} with camber	x	x	x	x	x	x	x
QDZ9	Variation of peak factor D_{mr} with camber and load	x	x	x	x	x	x	x
QDZ10	Variation of peak factor D_{mr} with camber squared	x	x	x	x			x
QDZ11	Variation of D_{mr} with camber squared and load	x	x	x	x			x
QEZ1	Trail curvature E_{pt} at F_{znom}	x	x	x	x	x	x	x
QEZ2	Variation of curvature E_{pt} with load	x	x	x	x	x	x	x
QEZ3	Variation of curvature E_{pt} with load squared	x	x	x	x	x	x	x
QEZ4	Variation of curvature E_{pt} with sign of α -t	x	x	x	x	x	x	x
QEZ5	Variation of E_{pt} with camber and sign α -t	x	x	x	x	x	x	x
QHZ1	Trail horizontal shift S_{ht} at F_{znom}	x	x	x	x	x	x	x
QHZ2	Variation of shift S_{ht} with load	x	x	x	x	x	x	x
QHZ3	Variation of shift S_{ht} with camber	x	x	x	x	x	x	x
QHZ4	Variation of shift S_{ht} with camber and load	x	x	x	x	x	x	x
SSZ1	Nominal value of s/R_0 : effect of F_x on M_z	x	x	x	x	x	x	x
SSZ2	Variation of distance s/R_0 with F_y/F_{znom}	x	x	x	x	x	x	x
SSZ3	Variation of distance s/R_0 with camber	x	x	x	x	x	x	x
SSZ4	Variation of distance s/R_0 with load and camber	x	x	x	x	x	x	x
PPZ1	Linear pressure effect on pneumatic trail	x	x					
PPZ2	Influence of inflation pressure on residual aligning torque	x	x					
QTZ1	Gyroscopic torque constant					x	x	x
MBELT	Belt mass of the wheel					x	x	x
[TURNSSLIP_COEFFICIENTS]								
PDXP1	Peak F_x reduction due to spin parameter	x	x	x	x			
PDXP2	Peak F_x reduction due to spin with varying load parameter	x	x	x	x			
PDXP3	Peak F_x reduction due to spin with kappa parameter	x	x	x	x			
PKYP1	Cornering stiffness reduction due to spin	x	x	x	x			
PDYP1	Peak F_y reduction due to spin parameter	x	x	x	x			
PDYP2	Peak F_y reduction due to spin with varying load parameter	x	x	x	x			
PDYP3	Peak F_y reduction due to spin with alpha parameter	x	x	x	x			
PDYP4	Peak F_y reduction due to square root of spin parameter	x	x	x	x			
PHYP1	F_y -alpha curve lateral shift limitation	x	x	x	x			
PHYP2	F_y -alpha curve maximum lateral shift parameter	x	x	x	x			
PHYP3	F_y -alpha curve maximum lateral shift varying with load parameter	x	x	x	x			
PHYP4	F_y -alpha curve maximum lateral shift parameter	x	x	x	x			
PECP1	Camber w.r.t. spin reduction factor parameter in camber stiffness	x	x	x	x			
PECP2	Camber w.r.t. spin reduction factor varying with load parameter in camber stiffness	x	x	x	x			
QDTP1	Pneumatic trail reduction factor due to turn slip parameter	x	x	x	x			
QCRP1	Turning moment at constant turning and zero forward speed parameter	x	x	x	x			
QCRP2	Turn slip moment (at $\alpha=90^\circ$) parameter for increase with spin	x	x	x	x			
QBRP1	Residual (spin) torque reduction factor parameter due to side slip	x	x	x	x			
QDRP1	Turn slip moment peak magnitude parameter	x	x	x	x			

Obsolete parameters which may be in a tyre property file, but are ignored by MF-Tyre/MF-Swift 6.x

description			MF-Tyre 5.2	SWIFT 1.2	MF-MCTyre 1.1
[MODEL]					
TYPE		1	x	x	x
MFSAFE1		1	x	x	x
MFSAFE2		1	x	x	x
MFSAFE3		1	x	x	x
[SHAPE]					
	The complete shape section is obsolete	2	x		x
[INERTIA]					
M_A	Portion of tyre mass of tyre part fixed to rim	3		x	
I_AY	Normalized moment of inertia about Y of tyre part fixed to rim	3		x	
I_AXZ	Normalized moment of inertia about XZ of tyre part fixed to rim	3		x	
M_R	Normalized residual mass	4		x	
I_R	Normalized moment of inertia about Z of residual mass	4		x	
[STRUCTURAL]					
K_RX	Longitudinal residual damping	5		x	
K_RY	Lateral residual damping	5		x	
K_RP	Yaw residual damping	5		x	
[VERTICAL]					
BOTTOM_TRNSF	Transition range of bottoming	6		x	
[CONTACT_PATCH]					
FLT_A	Filter constant contact length	7		x	
Q_KC1	Low speed tread element damping coefficient	8		x	
Q_KC2	Low speed tread element damping coefficient	8		x	
[SCALING_COEFFICIENTS]					
LGAX	Scale factor of camber for Fx	9	x	x	x
LGAY	Scale factor of camber for Fy	10	x	x	x
LGAZ	Scale factor of camber for Mz	11	x	x	x
1	parameter was not used				
2	used in combination with ADAMS durability contact; replaced by motorcycle contact and basic functions/ellipsoid contact				
3	replaced by new mass/inertia definitions				
4	in MF-Swift 6.0 and 6.1 a new formulation is used without residual mass replaced by parameter DAMP_RESIDUAL				
5	parameter deleted				
6	parameter deleted				
7	parameter set internally in the software				
8	replaced by parameter DAMP_VLOW				
9	parameter deleted, adjust PDX3 directly				
10	camber force stiffness is controlled by parameter LKYC				
11	camber moment stiffness is controlled by parameter LKZC				

Calcul de la force longitudinal F_x

$$F_x \cong D_x \sin \left[C_x \arctan \left(\frac{B_x v_x}{E_x + B_x v_x} \arctan \left(\frac{B_x v_x}{E_x + B_x v_x} \right) \right) \right] \cdot S_{Vx} \cdot G_{x\delta}$$

Glissement pur :

$$v_x \cong v \cdot S_{Hx}$$

$$C_x \cong p_{Cx1} \cdot \alpha_{Cx}$$

$$D_x \cong \pi_x \cdot F_z \cdot \gamma_1$$

$$\pi_x \cong \frac{1}{p_{Dx1}} \cdot \frac{1}{p_{Dx2}} df_z \cdot \frac{1}{p_{px3}} dpi \cdot \frac{1}{p_{px4}} dpi^2 \cdot \frac{1}{p_{Dx3}} \phi^2 \cdot \alpha_{\pi x}$$

$$E_x \cong \frac{1}{p_{Ex1}} \cdot \frac{1}{p_{Ex2}} df_z \cdot \frac{1}{p_{Ex3}} df_z^2 \cdot \frac{1}{p_{Ex4}} \operatorname{sgn}(v_x) \cdot \alpha_{Ex} \cdot 1$$

$$K_{xv} \cong F_z \cdot \frac{1}{p_{Kx1}} \cdot \frac{1}{p_{Kx2}} df_z \cdot \exp \left(\frac{1}{p_{Kx3}} df_z \right) \cdot \frac{1}{p_{px1}} dpi \cdot \frac{1}{p_{px2}} dpi^2 \cdot \alpha_{Kxv}$$

$$B_x \cong \frac{K_{xv}}{C_x D_x}$$

$$S_{Hx} \cong \frac{1}{p_{Hx1}} \cdot \frac{1}{p_{Hx2}} df_z \cdot \alpha_{Hx}$$

$$S_{Vx} \cong F_z \cdot \frac{1}{p_{Vx1}} \cdot \frac{1}{p_{Vx2}} df_z \cdot \alpha_{Vx} \cdot \alpha_{\pi x} \cdot \gamma_1$$

Glissement couplé :

$$G_{x\delta} \cong \frac{\cos \left[C_{x\delta} \arctan \left(\frac{B_{x\delta} \delta_s}{E_{x\delta} + B_{x\delta} \delta_s} \arctan \left(\frac{B_{x\delta} \delta_s}{E_{x\delta} + B_{x\delta} \delta_s} \right) \right) \right]}{\cos \left[C_{x\delta} \arctan \left(\frac{B_{x\delta} S_{Hx\delta}}{E_{x\delta} + B_{x\delta} S_{Hx\delta}} \arctan \left(\frac{B_{x\delta} S_{Hx\delta}}{E_{x\delta} + B_{x\delta} S_{Hx\delta}} \right) \right) \right]} -$$

$$\delta_s \cong \delta_F \cdot S_{Hx\delta}$$

$$B_{x\delta} \cong (r_{Bx1} \cdot r_{Bx3} \phi^2) \cos \{ \arctan[r_{Bx2} v] \} \cdot \alpha_{xa}$$

$$C_{x\delta} \cong r_{Cx1}$$

$$E_{x\delta} \cong r_{Ex1} \cdot r_{Ex2} df_z$$

$$S_{Hx\delta} \cong r_{Hx1}$$

Lorsque le glissement est non couplé, $G_{x\delta} \cong 1$

Calcul de la force latérale Fy

$$F_y \cong G_{yv} F_{yp} \cdot S_{Vyv}$$

Glissement pur :

$$F_{yp} \cong D_y \sin \left[C_y \arctan \left(\frac{B_y \delta_y}{E_y + B_y \delta_y} \right) \arctan \left(\frac{B_y \delta_y}{E_y + B_y \delta_y} \right) \right] \cdot S_{Vy}$$

$$\delta_y \cong \delta_F \cdot S_{Hy}$$

$$C_y \cong p_{Cy1} o_{Cy}$$

$$D_y \cong \pi_y \wedge F_z \wedge \gamma_2$$

$$\pi_y \cong \mp_{Dy1} \cdot p_{Dy2} df_z \wedge \left[p_{py3} dpi \cdot p_{py4} dpi^2 \wedge \left(p_{Dy3} \varphi^2 \wedge o_{\pi} \right) \right]$$

$$E_y \cong \mp_{Ey1} \cdot p_{Ey2} df_z \wedge \left[p_{Ey5} \varphi^2 \wedge \left(\mp_{Ey3} \cdot p_{Ey4} \varphi \cdot \text{sgn} \mp_{Ey} \cdot o_{Ey} \wedge 1 \right) \right]$$

$$K_{y\delta} \cong p_{Ky1} \wedge F'_{z0} \wedge \left[p_{py1} dpi \wedge \sin \left\{ p_{Ky4} \arctan \left\{ \frac{F_z}{\mp_{Ky2} \cdot p_{Ky5} \varphi^2 F'_{z0} \wedge \left[p_{py2} dpi \right]} \right\} \right\} \wedge \left(p_{Ky3} \varphi \wedge o_{Ky\delta} \wedge \gamma_3 \right) \right]$$

$$K_{y\delta 0} \cong p_{Ky1} \wedge F'_{z0} \wedge \left[p_{py1} dpi \wedge \sin \left\{ p_{Ky4} \arctan \left\{ \frac{F_z}{p_{Ky2} F'_{z0} \wedge \left[p_{py2} dpi \right]} \right\} \right\} \wedge o_{Ky\delta} \right]$$

$$K_{y\varphi 0} \cong \mp_{Ky6} \cdot p_{Ky7} df_z \wedge F_z o_{Ky\varphi} \wedge \left[p_{py5} dpi \right]$$

$$B_y \cong \frac{K_{y\delta}}{C_y D_y}$$

$$S_{Hy0} \cong \mp_{Hy1} \cdot p_{Hy2} df_z \wedge o_{Hy}$$

$$S_{Hy\varphi} \cong \frac{K_{y\varphi 0} \varphi \wedge S_{Vy\varphi}}{K_{y\delta}} \wedge \gamma_0 \cdot \gamma_4 \wedge 1$$

$$S_{Hy} \cong S_{Hy0} \cdot S_{Hy\varphi}$$

$$S_{Vy0} \cong F_z \mp_{Vy1} \cdot p_{Vy2} df_z \wedge \alpha_{Vy} o_{\pi}$$

$$S_{Vy\varphi} \cong F_z \mp_{Vy3} \cdot p_{Vy4} df_z \wedge \varphi \wedge o_{Ky\varphi} o_{\pi} \wedge \gamma_2$$

$$S_{Vy} \cong S_{Vy0} \wedge \gamma_2 \cdot S_{Vy\varphi}$$

Glissement couplé :

$$D_{Vy\kappa} = \mu_y F_z (r_{Vy1} + r_{Vy2} df_z + r_{Vy3} \gamma) \cos(\arctan(r_{Vy4} \alpha_F)) \cdot \zeta_2$$

$$S_{Vy\kappa} = D_{Vy\kappa} \sin(r_{Vy5} \arctan(r_{Vy6} \kappa)) \wedge \gamma_{Vy\kappa}$$

Fonction de pondération :

$$G_{y\kappa} = \frac{\cos[C_{y\kappa} \arctan\{B_{y\kappa} \kappa_s - E_{y\kappa}(B_{y\kappa} \kappa_s - \arctan(B_{y\kappa} \kappa_s))\}]}{\cos[C_{y\kappa} \arctan\{B_{y\kappa} S_{Hy\kappa} - E_{y\kappa}(B_{y\kappa} S_{Hy\kappa} - \arctan(B_{y\kappa} S_{Hy\kappa}))\}]}$$

$$\nu_s \cong \nu \cdot S_{Hyv}$$

$$B_{yv} \cong (r_{By1} \cdot r_{By4} \varphi^2) \cos\{\arctan[r_{By2}(\delta_F - r_{By3})]\} \phi_{yv}$$

$$C_{yv} \cong r_{Cy1}$$

$$E_{yv} \cong r_{Ey1} \cdot r_{Ey2} df_z$$

$$S_{Hyv} \cong r_{Hy1} \cdot r_{Hy2} df_z$$

En mode non couplé: $S_{Vyv} \cong 0, G_{yv} \cong 1$

Calcul du moment de renversement Mx

$$\begin{aligned} M_x = R_0 F_z \lambda_{Mx} & \left\{ q_{sx1} \lambda_{VMx} - q_{sx2} \gamma (1 + p_{pmx} dpi) + q_{sx3} \frac{F_y}{F_{z0}} \right. \\ & + q_{sx4} \cos \left[q_{sx5} \arctan \left(\left(q_{sx6} \frac{F_z}{F_{z0}} \right)^2 \right) \right] \cdot \sin \left[q_{sx7} \gamma + q_{sx8} \arctan \left(q_{sx9} \frac{F_y}{F_{z0}} \right) \right] \\ & \left. + q_{sx10} \arctan \left(q_{sx11} \frac{F_z}{F_{z0}} \right) \gamma \right\} + R_0 \lambda_{Mx} (F_y \{q_{sx13} + q_{sx14} |\gamma|\} - F_z q_{sx12} \gamma |\gamma|) \end{aligned}$$

Calcul du moment de résistance au roulement My

$$M_y = -R_0 F_{z0} \lambda_{My} \left\{ q_{sy1} + q_{sy2} \frac{F_x}{F_{z0}} + q_{sy3} \left| \frac{V_x}{V_{ref}} \right| + q_{sy4} \left(\frac{V_x}{V_{ref}} \right)^4 + q_{sy5} \gamma^2 + q_{sy6} \frac{F_z}{F_{z0}} \gamma^2 \right\} \left\{ \left(\frac{F_z}{F_{z0}} \right)^{q_{sy7}} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{q_{sy8}} \right\}$$

Calcul du moment d'alignement Mz

$$M_z = -t \cdot F_{y0} \cdot G_{y\kappa 0} + M_{zr} + s \cdot F_x$$

où $F_{y0} \cdot G_{y\kappa 0}$ désigne la force latérale à carrossage nul

$$\alpha_t = \alpha_M + S_{Ht} \quad \text{et} \quad \alpha_r = \alpha_F + S_{Hy} + \frac{S_{Vy}}{K_{y\alpha}}$$

$$S_{Ht} = q_{Hz1} + q_{Hz2} df_z + (q_{Hz3} + q_{Hz4} df_z) \cdot \gamma$$

Glissement pur :

$$\delta_{t,eq} \cong \arctan \sqrt{\tan^2(\delta_t) \cdot \left[\frac{K_{xv}}{K_{y\delta}} \right]^2} \nu^2 \operatorname{sgn}(\delta_t)$$

$$\delta_{r,eq} \cong \arctan \sqrt{\tan^2(\delta_r) \cdot \left[\frac{K_{xv}}{K_{y\delta}} \right]^2} \nu^2 \operatorname{sgn}(\delta_r)$$

$$s \cong \left[s_{sz1} \cdot s_{sz2} \left[\frac{F_y}{F_{z0}} \right] \cdot \mathfrak{s}_{sz3} \cdot s_{sz4} df_z \varphi \right] R_0 O_s$$

Glissement couplé :

$$\delta_{t,eq} \cong \delta_t$$

$$\delta_{r,eq} \cong \delta_r$$

$$s \cong 0$$

Chasse pneumatique t :

$$t = D_t \cos \left[C_t \arctan \left\{ B_t \alpha_{t,eq} - E_t \left(B_t \alpha_{t,eq} - \arctan \left(B_t \alpha_{t,eq} \right) \right) \right\} \right] \cdot \cos(\alpha_M)$$

$$B_t = (q_{Bz1} + q_{Bz2} df_z + q_{Bz3} df_z^2) \cdot (1 + q_{Bz4} \gamma + q_{Bz5} |\gamma|) \cdot \frac{\lambda_{Ky\alpha}}{\lambda_{\mu y}}$$

$$C_t = q_{Cz1}$$

$$D_t = F_z \cdot (q_{Dz1} + q_{Dz2} df_z) \cdot (1 - p_{pz1} dpi) \cdot (1 + q_{Dz3} \gamma + q_{Dz4} \gamma^2) \cdot \frac{R_0}{F_{z0}} \cdot \lambda_t \cdot \zeta_5$$

Bibliographie

- [LAR, 1976] (1971-1976). *La grande encyclopédie*. Librairie Larousse. ix, 5
- [MIC, 2001] (2001). *Le pneu, l'adhérence*. Société de technologie Michelin. 8
- [FT2, 2002] (2002). Rapport technique, Flat Trac®III Tire Test System. Maintenance. 66
- [MIC, 2008] (2008). Procédé de simulation du comportement thermo-mécanique d'un pneu roulant sur le sol. 23
- [RT3, 2013] (2013). Rapport technique, RT3000-GNSS/INS for high dynamic vehicle testing. 108
- [SWI, 2013] (2013). Rapport technique, Spinning Wheel Integrated Force Transducer (SWIFT®) - Accurate and reliable data acquisition for vehicle testing and analysis. 108
- [RTS, 2013] (2013). Rapport technique, RT-Split - GNSS/INS for high dynamic vehicle testing. 108
- [COS, 2013] (2013). Ftire presentation 2013. ix, 30, 31
- [ETR, 2014] (2014). <http://www.etrto.org>. 66
- [OXY, 2014] (2014). <http://www.oxyo-pneus.fr/guide-pneu>. ix, 5, 7
- [AFNOR, 1995] AFNOR (1995). Application de la statistique - Étude de la normalité d'une distribution. NF X06-050 : 1995. 53
- [AFNOR, 2003] AFNOR (2003). Plans d'expériences - guide pour le choix d'un plan d'expériences. FD X06-081 : 2003. 34, 60
- [AFNOR, 2006] AFNOR (2006). Pneumatiques pour voitures particulières – méthode de mesure de l'adhérence relative sur revêtement mouillé – pneumatiques neufs en charge. ISO 23671 : 2006. 67
- [AFNOR, 2010] AFNOR (2010). Pneumatiques pour voitures particulières – vérification de l'aptitude des pneumatiques – méthodes d'essai en laboratoire. ISO 10191 : 2010. 67
- [AFNOR, 2013] AFNOR (2013). Pneumatiques et jantes pour voitures particulières. partie 1 : Pneumatiques (série millimétrique). partie 2 : Jantes. ISO 4000 : 2013. 67
- [Arnoux, 2008] ARNOUX, E. (2008). Modèle simplifié de véhicule, à quatre roues. Rapport technique, Renault. 90, 99, 102
- [Asch *et al.*, 2011] ASCH, G., RENARD, P., DESGOUTTE, P., MAMMERI, Z., CHAMBÉROD, E. et GUNTHER, J. (2011). *Acquisition de données - 3ème édition - Du capteur à l'ordinateur*. Dunod. 111
- [Bakker *et al.*, 1989] BAKKER, E., PACEJKA, H. et LIDNER, L. (1989). A new tire model with an application in vehicle dynamics studies. *SAE Technical Paper 890087*. 14
- [Bertrand, 1986] BERTRAND, R. (1986). *Pratique de L'Analyse Statistique des Données*. Presses de l'Université du Québec. 48

- [Box et Behnken, 1960] BOX, G. et BEHNKEN, D. (1960). Some new three level designs for the study of quantitative factors. *Technometrics* 2, 4:455–475. [43](#), [58](#), [85](#)
- [Chan, 2008] CHAN, B.-Y. (2008). *Development of an off road capable tire model for vehicle dynamics simulations*. Thèse de doctorat, Virginia Polytechnic Institute and State University. [25](#)
- [Doehlert, 1970] DOEHLERT, D. H. (1970). Uniform shell designs. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 19, No. 3:231–239. [58](#)
- [Durand-Gasselien et Dailliez, 2009] DURAND-GASSELIN, B. et DAILLIEZ, T. (2009). New handling simulation opportunities yielded by the tametire tire model. *In SIA*. [23](#)
- [Duysinx, 2010] DUYSINX, P. (2009-2010). Performances et comportement des véhicules. Rapport technique, Université de Liège. [1](#), [115](#)
- [Duysinx, 2014] DUYSINX, P. (2013-2014). Suspension-conception des essieux. Rapport technique, Ingénierie des Véhicules Terrestres-Université de liège. [102](#), [103](#)
- [Faivre et al., 2013] FAIVRE, R., IOOSS, B., MAHÉVAS, S., MAKOWSKI, D. et MONOD, H. (2013). *Analyse de sensibilité et exploration de modèles : Application aux sciences de la nature et de l'environnement*. Quae éditions. [37](#)
- [Faucher, 2006] FAUCHER, J. (2006). *Les plans d'expériences pour le réglage de commandes à base de logique floue*. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse. [46](#)
- [Ferreboeuf, 1998] FERREBOEUF, C. (1998). Qualité en conception - méthodologie et mise en œuvre. *In Techniques de l'ingénieur*. [ix](#), [34](#)
- [Fevrier et Fandard, 2007] FEVRIER, P. et FANDARD, G. (2007). Modèle pneu thermomécanique pour la simulation dynamique véhicule. *In Congrès dynamique du véhicule*. [23](#)
- [Gillespie, 1992] GILLESPIE, T. D. (1992). *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. SAE International. [x](#), [116](#)
- [Goryca, 2010] GORYCA, J. (2010). Force and moment plots from pacejka 2002 magic formula tire model coefficients. Rapport technique, U.S. Army Research. [14](#)
- [Goupy, 1990] GOUPY, J. (1990). Etude comparative de divers plans d'expériences. *Revue statistique appliquée*, 4:5–44. [42](#)
- [Goupy, 2000] GOUPY, J. (2000). Modélisation par les plans d'expériences. Rapport technique, Techniques de l'ingénieur. [45](#)
- [Goupy et Creighton, 2006] GOUPY, J. et CREIGHTON, L. (2006). *Introduction aux plans d'expériences*. Dunod. [40](#), [54](#), [73](#)
- [Guillet, 2011] GUILLET, J. (2011). *Etude et réduction d'ordre de modèles linéaire structurés. Application à la dynamique du véhicule*. Thèse de doctorat, Université de Haute Alsace. [97](#)
- [Hamza et al., 2012] HAMZA, S., ANSTETT-COLLIN, F., KIEBRE, R. et BASSET, M. (Juillet 2012). Analyse de sensibilité basée sur les polynômes du chaos pour des modèles de type boîte noire. *In Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2012), Grenoble, France*. [37](#)
- [Hohmann, 2010] HOHMANN, C. (2010). *Guide pratique des 5S et du management visuel : Pour les managers et les encadrants*. Eyrolles. [52](#)
- [ISO, 2011] ISO (2011). Road vehicle - vehicle dynamics and road-holding ability - vocabulary. ISO 8855 : 2011. [9](#), [91](#), [97](#), [115](#)

-
- [Jaiswal *et al.*, 2010] JAISWAL, M., MAVROS, G., RAHNEJAT, H. et KING, P. (2010). Influence of tyre transience on anti-lock braking. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K : Journal of Multi-body Dynamics* [© IMECHE]:1–17. [17](#)
- [Khuri et Cornell, 1996] KHURI, A. I. et CORNELL, J. A. (1996). *Response Surfaces : Designs and Analyses*. CRC Press. [61](#)
- [Kiébré, 2010] KIÉBRÉ, R. (2010). *Contribution to the modelling of aircraft tyre-road interaction*. Thèse de doctorat, Université de Haute Alsace - Laboratoire MIPS/MIAM. [ix](#), [10](#), [13](#), [23](#)
- [Kuiper et Van Oosten, 2007] KUIPER, E. et VAN OOSTEN, J. J. M. (2007). The pac2002 advanced handling tire model. *Vehicle System Dynamics*, 45, Supplement:153–167. [17](#)
- [Lamy, 2010] LAMY, C. (2010). *Novel accurate tyre slip angle measurement means : application to tyre model identification from vehicle-on-track tests for global vehicle performance analysis*. Thèse de doctorat, Université de Haute-Alsace. [107](#)
- [Linder, 2005] LINDER, R. (2005). *Les plans d'expériences : Un outil indispensable à l'expérimentateur*. Presses Ponts et Chaussées. [34](#), [46](#), [49](#)
- [Martin, 2003] MARTIN, M. (2003). Le pneumatique : quelques aspects de son comportement. Rapport technique, Info Tech Num. 7. [21](#)
- [Meot, 2003] MEOT, A. (2003). *Introduction aux statistiques inférentielles : De la logique à la pratique*. De Boeck. [53](#)
- [Pacejka, 2002] PACEJKA, H. (2002). *Tyre and vehicle dynamics*. Oxford : Butterworth-Heinemann. [17](#)
- [Pacejka, 2005] PACEJKA, H. (2005). *Tire and Vehicle Dynamics, 2nd edition*. SAE International and Elsevier. [14](#)
- [Pacejka, 2012] PACEJKA, H. (2012). *Tire and Vehicle Dynamics, Third Edition*. Butterworth-Heinemann. [ix](#), [14](#), [15](#), [16](#)
- [Queslel, 2007] QUESLEL, J.-P. (2007). *Les caoutchoucs naturels*. Dunod. [8](#)
- [Rabier, 2007] RABIER, F. (2007). *Modélisation par la méthode des plans d'expériences du comportement dynamique d'un module IGBT utilisé en traction ferroviaire*. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse. [47](#)
- [Saltelli, 2006] SALTELLI, A. (2006). The critique of modelling and sensitivity analysis in the scientific discourse. an overview of good practices. *In Transatlantic Uncertainty Colloquium*. [ix](#), [36](#)
- [Saltelli *et al.*, 2008] SALTELLI, A., RATTO, M., ANDRES, T., CAMPOLONGO, F., CARIBONI, J., GATELLI, D., SAISANA, M. et TARANTOLA, S. (2008). *Global Sensitivity Analysis : The Primer*. Wiley-Blackwell. [37](#)
- [Saltelli *et al.*, 2004] SALTELLI, A., TARANTOLA, S., CAMPOLONGO, F. et RATTO, M. (2004). *Sensitivity Analysis in Practice : A Guide to Assessing Scientific Models*. Wiley. [37](#)
- [Tinsson, 2010] TINSSON, W. (2010). *Plans d'expériences : constructions et analyses statistiques*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K. Cours. [58](#)
- [Umsrithong et Sandu, 2010] UMSRITHONG, A. et SANDU, C. (2010). A 3d semi-empirical on-road transient tire model. *SAE International Journal of Commercial Vehicles*, 3(1):42–59. [28](#)
- [Umsrithong et Sandu, 2009] UMSRITHONG, A. et SANDU, C. (October 2009). A semi-empirical tire model for transient maneuver of on road vehicle. *In SAE 2009 Commercial Vehicle Engineering Congress & Exhibition, Rosemont, IL, USA*. [25](#), [27](#)

- [Wong, 2008] WONG, J., J. Y. (2008). *Theory of Ground Vehicles, 4th Edition*. John Wiley & Sons. [x](#), [115](#), [116](#)
- [Wu *et al.*, 2011] WU, X., FARHAD, M. et WONG, J. (April 2011). Investigating and improving vehicle transient handling performance. *In SAE 2011 World Congress & Exhibition, Detroit, MI, USA*. [29](#)